# Weak solutions of Navier-Stokes equations



増田, 久弥

数理解析研究所講究録
545巻 1985年 84-89


# Weak solutions of Navier-Stokes equations

Kyûya Masuda (Tohoku University)
増田久弥（東北大・理）

1. 序文　　私の話しの主題は，Navier-Stokes equation

$$\text{(N-S)}\quad \begin{cases} u_t - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, \quad \nabla\cdot u = 0, \quad x\in\Omega, \ t>0; \\ u_{|t=0} = a, \qquad u_{|\Gamma} = 0 \end{cases}$$

の解 $u = (u_1,u_2,..u_n)$ の，existence, uniqueness, decay

についてである。ここで，$\Omega$ は，$R^n$ の領域，$\Gamma$ は $\Omega$ の境界である。まず，関数空間を導入する。

$C^\infty_{0,\sigma} = \{ u = (u_1,\dots,u_n)\in C^\infty_0(\Omega);\ \nabla\cdot u = 0\}$

$L^2_\sigma$ = the closure of $C^\infty_{0,\sigma}$ with respect to the norm of $L^2(\Omega)$; $(\cdot,\cdot)$, $\|\ \|$ denote the inner product, norm of $L^2_\sigma$.

$H^1_{0,\sigma}$ = the closure of $C^\infty_{0,\sigma}$ in $H^1(\Omega)$ (Sobolev space).

2. Existence.

A) weak solution.　E. Hopf [1] は，次の定理を示した。

定理 1.1.　$a\in L^2_\sigma$ が与えられたとき，(N-S) の Hopf の weak solution が存在する。その上，

(1) $$\lim_{t\to 0} \|u(\cdot,t) - a(\cdot)\| = 0.$$

__定義__ u が __Hopf の weak solution__ であるとは,

i) $u \in L^2((0,T);H^1_{0,\sigma})$, $^\forall T>0$.

ii) energy inequality:

$$\|u\|^2 + 2\int_0^t \|\nabla u\|^2 dt \le \|a\|^2, \quad ^\forall t>0;$$

iii) u が弱い意味で(N-S)方程式を満たす。

(2) $$\int_0^\infty \{-(u,\Phi_t) + (\nabla u,\nabla\Phi) + (u\cdot\nabla u,\Phi)\}\, dt = (a,\Phi(\cdot,0))$$

を $C_0^\infty(\Omega\times[0,\infty))$ に属する任意の $\Phi$ が満す。

私は, test functions としてなるべく広いクラスからとりたい。いいかえると,なるべく解のクラスを狭くしたい。すなわち,上の弱解の iii) において, $C_0^\infty(\Omega\times[0,\infty))$ の代わりに, $C_0^1([0,\infty);L^n\cap H^1_{0,\sigma})$ をとりたい。

__定義__ u が __weak solution__ であるとは,上の i), ii) の外に, (2) を任意の $\Phi\in C_0^1([0,\infty);H^1_{0,\sigma}\cap L^n)$ が満たすときである。

__注意__. weak solution ならば Hopf の意味での weak solution である。しかし, __逆はわからない__。次の条件のひとつが満たされておれば, Hopf の意味での weak solution は, weak solution

である。

a) $\Omega = R^n$ ;

b) $\Omega$ : star-like domain;

c) $n = 2,3,4$.

このとき,定理 1 と類似の定理が成立する。

定理 1 . $a \in L^2_\sigma$ が与えられたとき,(N-S) の weak solution が存在する。その上,(1) を満たす。

B) strong solution strong 解の存在は多くの人が試みている。ここでは,Professor T. Kato の最近の結果を引用するにとどめよう。$\Omega = R^n$ の場合を考える。$a \in L^n_\sigma$ としよう。このとき,もし $\|a\|_{L^n}$ が十分小ならば $BC([0, \infty); L^n_\sigma)$ に属する (N-S) の強解が存在する。

これを示すために,(N-S) を次の積分方程式に変換した。

(3) $$u(t) = e^{t\Delta} a + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \partial_j e^{(t-s)\Delta} P(u_j u)\, ds$$

そして,これを帰納的に解いて,解の存在を示した。

3. Uniqueness. 関数空間 $L^{r,r'}$ を導入することから始めよう。

$u$ が $L^{r,r'}(\Omega\times(0,T))$ に属するとは,

i) $u$ は $\Omega\times(0,\infty)$ 上可測

ii) $\int_0^T \|u(\cdot,s)\|_{L^r}^{r'}\,ds < \infty$.

Foias [2] は $\Omega = R^n$ の場合を考え、次を示した。

<u>定理 $2_1$.</u> $u$ を $L^{r,r'}(R^n\times(0,T))$ に属する weak solution としよう。但し、$\frac{n}{r}+\frac{2}{r'}<1$, $r>n$. この時、この $u$ が、唯一の weak solution である。

Serrin [3] はこの後次の結果を得た。

<u>定理 $2_2$.</u> $\Omega$ を $R^n$ の一般的領域とする。但し, $n = 2, 3, 4$. $u$ を $L^{r,r'}(\Omega\times(0,T))$ に属する (N-S) の weak solution であるとしよう。但し, $\frac{n}{r}+\frac{2}{r'}\leq 1$, $r>n$ このとき, このが唯1の weak solution である。

我々の目的は, 上の定理を一般化することである。

<u>定理 2.</u> $\Omega$ を $R^n$ の一般的領域とする。$u$ を $L^{r,r'}(\Omega\times(0,\infty))$ に属する (N-S) の weak solution としよう。但し, $\frac{n}{r}+\frac{2}{r'}\leq 1$ $r>n$. このとき, この $u$ が唯1の weak solution である。

次に上の定理の極限の場合、$r = n$, $r' = \infty$ の場合を考えてみよう。

定理 3. u を $L^{n,\infty}(\Omega\times(0,T)) = L^{\infty}((0,T);L^{n})$ に属する weak solution とする・

i) u が $L^n$ の norm で right continuous ( t につき ) であれば，このとき，u が唯1の weak solution である.

ii) u が t に関し $L^n$ の norm で t に関して t = 0 で right continutous とする・ このとき，u が t = 0 の近傍で唯1の weak solution である。

von Wahl[4] は最近類似の結果を得ている。

この結果を前にのべた Kato の解に適用してみよう。u は，(3) の $BC([0,\infty);L^n)$ の解である。 $a \in L^n_\sigma \cap L^2$ と仮定しよう。このとき，$a \in L^p$ $(2 \le p \le n)$.
(3) の右辺の第1項 $e^{t\Delta}a$ は，このとき，$L^p$ ( $2 \le p \le n$) に属する。他方，$u_j u \in L^{n/2}$. 故に，$P(u_j u) \in L^{n/2}$.
よって，(3)の右辺の integrad は，

$$\|\partial_j e^{(t-s)\Delta} P(u_j u)\| \le M\,(t-s)^{-1/2}$$

かくして，(3) の右辺は $L^{n/2}$ に属する。故に，$u \in L^p$ $(n/2 \le p \le n)$. 次々と，このようにして，p の power を下げていくことができて，$u \in L^{2}$ となる. さらに，この u が，$L^2$ での強解であることもわかる。かくして，u は，弱解となる。定理 3 を適用すれば，この u が唯1の弱解で

ある。

## 4. decay

A を $C_{0,\sigma}^{\infty}$ を domain にもつ $-\Delta$ の Friedrichs extension とする。

仮定　ある $\alpha \geq 0$ をとれば、

$$(I+A)^{-\alpha}\phi \in L^n \quad \text{for all } \phi \in L_\sigma^2$$

定理 4.　上の仮定の下で、u を弱解とする。このとき、

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds = 0$$

特に、もし u(t) が $t\to\infty$ のとき、極限をもてば、

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$$

を得る。

上の定理は Leray の問題に対し、肯定的な解を与えている。

References

[1]　E.Hopf; Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamishen Grundgleichugen. Math.Nach.,4, 213-231 (1950/51).

[2]　C. Foias; Une remarque sur l'unicité des solutions des equations de Navier-Stokes equations en dimension n. Bull. Soc.math.France. 89,1-8(1961).

[3]J.Serrin;　The initial value problem for the Navier-Stokes equations.　In: "Nonlinear problems". Univ. Wiscounsin Press. (1963),69-98.

[4]　von Wahl; pre·print.