Zbiory przybliżone
nowa matematyczna metoda analizy danych

Zdzisław Pawlak

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej PAN
44-100 Gliwice, ul. Bałtycka 5

Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania
01-447 Warszawa, ul. Newelska 6
E-mail: zpw@ii.pw.edu.pl

1. WSTĘP

Teoria zbiorów przybliżonych [4] jest, z logicznego punktu widzenia, nowym matematycznym podejściem do pojęć nieostrych Z praktycznego punktu widzenia teoria ta jest nową metodą analizy danych.

W teorii mnogości zbiór jest definiowany poprzez swoje elementy, przy czym nie jest tu potrzebna żadna dodatkowa wiedza o elementach uniwersum, z których tworzymy zbiory. W teorii zbiorów przybliżonych przeciwnie, zakładamy, iż mamy pewne dane o elementach uniwersum i dane te są wykorzystywane w tworzeniu zbiorów. Elementy, o których mamy identyczną informację są podobne i tworzą tzw. *zbiory elementarne.* Stanowią one podstawę rozumowań w teorii zbiorów przybliżonych. Suma dowolnych zbiorów elementarnych jest nazywana *zbiorem definiowalnym.* Zbiory, które nie są zbiorami definiowalnymi nazywane są *zbiorami przybliżonymi.*

Oczywiście, zbiory definiowalne można jednoznacznie scharakteryzować poprzez własności ich elementów, natomiast zbiorów przybliżonych nie można scharakteryzować w ten sposób. Dlatego w teorii zbiorów przybliżonych wprowadza się pojęcia *dolnego* i *górnego przybliżenia zbioru*, które pozwalają każdy zbiór niedefiniowalny (przybliżony) scharakteryzować za pomocą dwu zbiorów definiowalnych – jego dolnego i górnego przybliżenia.

Dolnym przybliżeniem zbioru są wszystkie te elementy, które w świetle posiadanej wiedzy mogą być zaklasyfikowane jednoznacznie do rozważanego zbioru, zaś górnym przybliżeniem zbioru są wszystkie te elementy, których nie można wykluczyć, w świetle posiadanej wiedzy, jako elementy danego zbioru. Różnica między górnym a dolnym przybliżeniem jest nazywana *obszarem brzegowym* (*brzegiem*) zbioru. Np. zbiór „liczb parzystych" jest ostry, gdyż każdą liczbę naturalną możemy jednoznacznie zaklasyfikować jako parzystą lub nieparzystą. Natomiast zbiór „zdolnych studentów" jest pojęciem nieostrym, gdyż nie o każdym studencie możemy jednoznacznie stwierdzić, iż jest on zdolny czy też nie.

Oczywiście zbiór jest przybliżony wtedy i tylko wtedy, gdy jego obszar brzegowy jest niepusty.

Z praktycznego punktu widzenia teoria zbiorów przybliżonych jest nową metodą analizy danych.

Umożliwia ona:

- szukanie zależności między danymi
- redukcję danych
- określenie wagi danych
- generowanie reguł decyzyjnych z danych

i wiele innych.

Do zalet teorii zbiorów przybliżonych należą:

- nie wymaga ona założeń odnośnie danych (np. prawdopodobieństwa czy rozmytości)
- szybkie algorytmy analizy danych
- łatwość interpretacji wyników
- prostota matematyczna

Metoda zbiorów przybliżonych znalazła liczne zastosowania, między innymi w:

- medycynie
- farmakologii
- bankowości
- lingwistyce
- rozpoznawaniu mowy
- ochrona środowiska
- bazach danych

i innych.

Teoria zbiorów przybliżonych ma wiele związków z innym dziedzinami, a w szczególności:

- teorią ewidencji Dempstera-Shafera
- teorią zbiorów rozmytych
- metodami wnioskowania Boolowskiego

Mimo to może ona być rozpatrywana jako niezależna samodzielna dyscyplina naukowa.

Teoria zbiorów przybliżonych nie jest alternatywą w stosunku do innych istniejących metod a raczej je uzupełnia i może być stosowana łącznie z nimi.

Na temat teorii zbiorów przybliżonych i jej zastosowań opublikowano na świecie do tej pory blisko trzy tysiące prac, oraz kilkanaście książek. Wzbudziła ona spore zainteresowanie, głównie w USA, Kanadzie i Japonii w Chinach i Indiach. Prace na jej temat prowadzone są również w wielu innych krajach. Również w Polsce kilka ośrodków badawczych zajmuje się tą teorią oraz jej zastosowaniami.

Do tej pory odbyło się wiele międzynarodowych konferencji na temat teorii zbiorów przybliżonych oraz jej zastosowań.

Ponadto na wielu renomowanych, międzynarodowych konferencjach organizowano specjalne sesje poświęcone teorii zbiorów przybliżonych. Teoria zbiorów przybliżonych wykazała swą użyteczność w wielu dziedzinach oraz wzbudziła spore zainteresowanie na świecie nie tylko wśród informatyków, ale również wśród logików i filozofów. Mimo to wymaga ona dalszych badań, w szczególności w zakresie jej podstaw matematycznych oraz możliwości zastosowań w różnych dziedzinach.

W pracy podane zostaną podstawowe pojęcia teorii zbiorów przybliżonych, przedyskutowane krótko jej zastosowania oraz dalsze perspektywy.

Więcej danych na temat zbiorów przybliżonych i ich zastosowań można znaleźć w Internecie: http://www.roughsets.org

2. ZBIORY

Zanim podamy główne koncepcje teorii zbiorów przybliżonych, przypomnijmy najpierw kilka faktów dotyczących pojęcia zbioru.

Podstawowym pojęciem matematyki jest pojęcie zbioru. Wszystkie konstrukcje matematyczne odwołują się do tego pojęcia.

Sformułowanie tego pojęcia oraz stworzenie teorii zbiorów zawdzięczamy matematykowi niemieckiemu Georgowi Cantorowi (1845-1918), który przed około 100 laty stworzył podwaliny współczesnej teorii mnogości. Oryginalna, intuicyjna definicja pojęcia zbioru Cantora [1] podana jest poniżej:

„Unter einer „Manningfaltigkeit" oder „Menge"verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele,welches sich als Eines denken lässt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann."

Jej tłumaczenie według [3] jest następujące:

„Pod pojęciem *rozmaitości* czy *zbioru* rozumiem mianowicie ogólnie każdą wielość, która może być pomyślana jako jedność, tj. każdy ogół określonych elementów, które na mocy pewnego prawa mogą być złączone w jedną całość",

lub w nieco prostszym sformułowaniu

"Pod pojęciem *zbioru* rozumiemy każde zebranie w jedną całość *M* określonych dobrze odróżnionych przedmiotów *m* naszego oglądu czy naszych myśli (które nazywane są *elementami M*)" [3].

Jak widać jest to pojęcie bardzo intuicyjne i proste.

W 1902 roku wybitny filozof angielski Bertrand Russell (1872-1970) zauważył, że teoria mnogości jest sprzeczna, tj., prowadzi do antynomii (sprzeczności) logicznych. Antynomia logiczna, dla krótkości zwana w dalszym ciągu po prostu antynomią, powstaje wtedy gdy, prowadząc poprawne rozumowanie logiczne dochodzimy do sprzeczności, tj. do zdań A i nie-A. Podważa to istotę rozumowania logicznego.

Dla przykładu omówimy tzw. antynomię Russella. Rozważmy zbiór X złożony ze wszystkich zbiorów Y, które nie są własnymi elementami. Jeżeli przyjmiemy, że X jest swoim własnym elementem to X, z definicji, nie może być swoim elementem; jeżeli zaś przyjmiemy, że X nie jest swoim elementem to zgodnie z definicją zbioru X musi on być swoim elementem. A więc przy każdym założeniu otrzymujemy sprzeczność.

Antynomia Russella świadczy o tym, że elementami zbioru nie mogą być dowolne obiekty, tak jak sobie to wyobrażał Cantor.

Mogłoby się wydawać, że antynomie to niewinne igraszki logiczne, jednakże tak nie jest. Podważają one istotę rozumowania logicznego. Dlatego też przez ponad sto lat próbowano „naprawić” teorię Cantora, lub zastąpić ją inną teorią zbiorów, jednakże rezultaty te, jak dotąd nie doprowadziły do pomyślnych rezultatów.

Jednocześnie, niezależnie od badań matematyków i filozofów, pojęcie zbioru zainteresowało inżynierów. Okazało się bowiem, że wiele problemów praktycznych nie da się sformułować i rozwiązać używając klasycznego, cantorowskiego pojęcia zbioru.

W 1965 roku profesor Lotfi Zadeh [6], z Uniwersytetu w Berkely zaproponował inne pojęcie zbioru, w którym elementy mogą należeć do zbioru w pewnym stopniu, a nie definitywnie, jak to ma miejsce w klasycznej teorii zbiorów. Propozycja ta znalazła bardzo wiele zastosowań i zapoczątkowała lawinę badań na temat „teorii zbiorów rozmytych” (*fuzzy set theory*), jak nazwano teorię Zadeha.

Teorię zbiorów rozmytych można uważać za pewną formalizację pojęć nieostrych.

Inne jeszcze podejście do formalizacji pojęć nieostrych zostało zaproponowane przez autora w postaci „teorii zbiorów przybliżonych” (*rough set theory*) [4]. Niezależnie od wielu zastosowań, zainteresowała ona licznych logików na świecie.

Dodajmy, że ani teoria zbiorów rozmytych, ani teoria zbiorów przybliżonych nie są alternatywą dla klasycznej teorii mnogości, gdyż obie te teorie do ich sformułowania wymagają pojęć tej teorii.

3. WNIOSKOWANIE Z DANYCH

Podstawowe pojęcia teorii zbiorów przybliżonych mogą być sformułowane całkowicie ogólnie jednakże z punktu widzenia zastosowań tej teorii wygodnie sformułować je w terminach analizy danych, którą można uważać za szczególny przypadek wnioskowania indukcyjnego.

Przypomnijmy, że mamy dwa główne rodzaje wnioskowań, dedukcyjne i indukcyjne. Wnioskowanie dedukcyjne daje narzędzia służące do wyprowadzania zdań prawdziwych z innych zdań prawdziwych. Wnioskowanie dedukcyjne prowadzi zawsze do konkluzji prawdziwych. Teoria dedukcji posiada dobrze ugruntowane powszechnie przyjęte podstawy teoretyczne. Wnioskowanie dedukcyjne jest głównym narzędziem stosowanym w rozumowaniach matematycznych i poza nią nie znalazło zastosowania.

W naukach przyrodniczych (np. w fizyce) podstawową rolę odgrywa *wnioskowanie indukcyjne*. Cechą charakterystyczną tego typu wnioskowań jest to, że nie wychodzą one jak w logice dedukcyjnej, od aksjomatów wyrażających wiedze ogólną o interesującym nas świecie, lecz punktem wyjścia tego typu rozumowań są pewne fakty częściowe o badanej rzeczywistości (przykłady), które następnie są uogólniane, tworząc wiedzę o szerszym świecie, niż ten, który stanowił punkt wyjścia wnioskowań.

W przeciwieństwie do wnioskowania dedukcyjnego, wnioskowanie indukcyjne nie prowadzi do wniosków prawdziwych a jedynie do wniosków prawdopodobnych (możliwych). Również w przeciwieństwie do logiki dedukcji, logika indukcji nie ma jednolitych, ogólnie przyjętych, podstaw teoretycznych. Rozstrzyganie prawdziwości hipotez w logice indukcji odbywają się nie, jak w logice dedukcji, drogą formalnego rozumowania, a na podstawie experymentu. Fizyka jest tu najlepszą ilustracją.

Powstanie komputerów i nowatorskie ich zastosowania przyczyniły się istotnie do gwałtownego wzrostu zainteresowania wnioskowaniem indukcyjnym. Dziedzina ta rozwija się dzięki informatyce niezwykle dynamicznie. Uczenie maszynowe, odkrywanie wiedzy, wnioskowanie z danych, systemy eksperckie i inne stanowią przykłady nowych kierunków, we wnioskowaniu indukcyjnym. Również badania nad teorią indukcji zawdzięczają informatyce nowe impulsy. Jednakże do sytuacji jaką mamy w logice dedukcji jest jeszcze bardzo daleka droga. Nie widać bowiem na horyzoncie zarysu teorii indukcji mającej taki status jak teoria dedukcji.

Reasumując, cechy charakterystyczne wyżej wymienionych wnioskowań podane są poniżej:

- dedukcyjne
  - zastosowania: matematyka
  - pełna teoria
  - wnioskowanie zawsze prawdziwe
  - weryfikacja hipotez - dowód
- indukcyjne
  - zastosowania: nauki przyrodnicze i techniczne
  - częściowe teorie
  - wnioski prawdopodobne (możliwe)
  - weryfikacja hipotez - eksperyment

Tak więc, analizę danych należy traktować jako szczególny przypadek wnioskowań indukcyjnych.

4. ZBIORY PRZYBLIŻONE I ANALIZA DANYCH

W celu lepszego i bardziej intuicyjnego zrozumienia podstaw tej teorii z punktu widzenia analizy danych zacznijmy od prostego przykładu. Rozpatrzmy zbiór danych podanych w tabeli 1. Wiersze tabeli opisują pacjentów, kolumny tabeli oznaczone *ból głowy*, *ból mięśni*, *temperatura* reprezentują symptomy choroby i nazywane są *atrybutami warunkowymi*. Kolumna oznaczona *grypa* definiuje podział pacjentów na dwie klasy: chorujących na grypę i niechorujących i nazwany jest *atrybutem decyzyjnym*.

Pacjent	*Ból głowy*	*Ból mięsni*	*Temperatura*	*Grypa*
1	*nie*	*tak*	*podwyższona*	*tak*
2	*tak*	*nie*	*podwyższona*	*tak*
3	*tak*	*tak*	*wysoka*	*tak*
4	*nie*	*tak*	*normalna*	*nie*
5	*tak*	*nie*	*podwyższona*	*nie*
6	*nie*	*nie*	*wysoka*	*tak*

Tabela 1

Tabele takiego rodzaju nazywamy tablicami decyzyjnymi. Rzeczywiste tablice decyzyjne mogą zawierać dużo więcej atrybutów i przypadków. Ponadto, oprócz atrybutów jakościowych mogą zawierać także wartości liczbowe. Niektóre wartości atrybutów dla pewnych przypadków mogą być także nieznane.

Problem będący przedmiotem naszego zainteresowania może być określony następująco: znaleźć zależność pomiędzy występowaniem grypy (lub jej niewystępowaniem) a symptomami opisującymi pacjentów. Inaczej mówiąc, celem jest opisanie zbioru przypadków {1,2,3,6} (lub zbioru {4,5}) w kategoriach wartości atrybutów warunkowych.

Zauważmy, że analizowane dane są niespójne, gdyż przypadki 2 i 5 dostarczają sprzecznych informacji, tzn. obaj pacjenci opisani są tymi samymi wartościami atrybutów warunkowych, lecz są przydzieleni do różnych klas decyzyjnych. Oznacza to, że zbiór pacjentów cierpiących z powodu grypy nie może być jednoznacznie opisany w kategoriach symptomów *ból głowy*, *ból mięśni*, *temperatura*. Jednakże możemy opisać ten zbiór w sposób przybliżony. W oparciu o posiadane dane można stwierdzić, że:

- {1, 3, 6} jest maksymalnym zbiorem przypadków, które są *z pewnością* zaklasyfikowane do klasy pacjentów z grypą, na podstawie opisu atrybutami warunkowymi,
- {1, 2, 3, 5, 6} jest zbiorem przypadków, co do których *możliwe* jest ich przydzielenie do klasy pacjentów z grypą, na podstawie opisu atrybutami warunkowymi,
- {2, 5} jest zbiorem przypadków, które nie mogą być jednoznacznie przydzielone do klasy *Grypa* lub do klasy brak *Grypy*, ze względu na sprzeczny opis atrybutami warunkowymi.

Dwa pierwsze zbiory są przybliżeniami klasy decyzyjnej *Grypa*, nazywanymi odpowiednio jej *dolnym* i *górnym* przybliżeniem.

Przedstawmy obecnie powyższe rozważania bardziej formalnie.

Tablice danych takie jak podano w powyższym przykładzie nazywane są często *systemami informacyjnymi*.

System informacyjny, jest parą (U, A, V, f), gdzie U jest niepustym i skończonym zbiorem obiektów zwanym *uniwersum*, A jest niepustym i skończonym zbiorem *atrybutów*. $V = \bigcup_{a\in A} V_a$, V_a jest *dziedziną* atrybutu $a\in A$, oraz $f : U \times A \rightarrow V$ jest *funkcją informacyjną*, taką, że $\forall a\in A$, $x\in U\, f(a,x)\in V_a$.

Z każdym podzbiorem atrybutów $B\subseteq A$ związana jest binarna relacja $I(B)$, nazywana *relacją nierozróżnialności*, zdefiniowana jako:

$$I(B) = \{(x,y)\in U\times U : \forall a\in B\, f(a,x)=f(a,y)\}$$

Jeśli $(x,y)\in I(B)$ to obiekty x i y są *nierozróżnialne* ze względu na podzbiór atrybutów B. Relacja nierozróżnialności jest relacją równoważności. Rodzinę wszystkich klas abstrakcji relacji $I(B)$, tj. podział U za pomocą B, oznaczamy $U / I(B)$. $B(x)$ oznacza klasę abstrakcji relacji $I(B)$ zawierającą obiekt x i nazywane są zbiorami *B-elementarnymi*

Jeżeli w systemie informacyjnym wyróżniamy rozłączne zbiory atrybutów warunkowych C i atrybutów decyzyjnych D (gdzie $A=C\cup D$), to system taki nazywany jest *tablicą decyzyjną*.

Niech $S = (U, A, V, f)$ będzie systemem informacyjnym, X niepustym podzbiorem U oraz $B\subseteq A$. Celem jest opisanie zbioru X w kategoriach wartości atrybutów z *B*. Prowadzi to zdefiniowania dwóch zbiorów $B_*(X)$ i $B^*(X)$, nazywanych odpowiednio *B-dolnym przybliżeniem* i *B-górnym przybliżeniem X*, zdefiniowanych jako:

$$B_*(X) = \{x \in U : B(x) \subseteq X\}, \qquad B^*(X) = \{x \in U : B(x) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Zbiór $BN_B(X) = B^*(X) - B_*(X)$ jest nazywany *B-brzegiem* zbioru *X*.

Dolne przybliżenie $B_*(X)$ zbioru *X* jest zbiorem obiektów, które można z *pewnością* zaliczyć do *X* na podstawie zbioru atrybutów *B*, podczas gdy obiekty z $B^*(X)$ mogą być tylko uznane za *możliwie* należące do *X*, w świetle atrybutów *B*. *B*-brzeg $BN_B(X)$ zawiera obiekty, których nie można jednoznacznie przydzielić do *X* z uwagi na sprzeczny opis w terminach atrybutów *B*. Natomiast obiekty z $U \setminus B^*(X)$ z pewnością nie należą do *X*. O zbiorze *X* mówimy, że jest *B-przybliżony*, jeśli $BN_B(X) \neq \emptyset$ w przeciwnym razie jest on *B-definiowalny* (dokładny).

Formalne właściwości przybliżeń pokazano poniżej.

1) $B_*(X) \subseteq X \subseteq B^*(X)$,

2) $B_*(\emptyset) = B^*(\emptyset) = \emptyset; B_*(U) = B^*(U) = U$,

3) $B^*(X \cup Y = B^*(X) \cup B^*(Y)$,

4) $B_*(X \cap Y) = B_*(X) \cap B_*(Y)$,

5) $X \subseteq Y$ implikuje $B_*(X) \subseteq B_*(Y)$ oraz $B_*(X) \subseteq B^*(Y)$,

6) $B_*(X \cup Y) \supseteq B_*(X) \cup B_*(Y)$,

7) $B^*(X \cup Y) \subseteq B^*(X) \cap B^*(Y)$,

8) $B_*(-X) = -B^*(X)$,

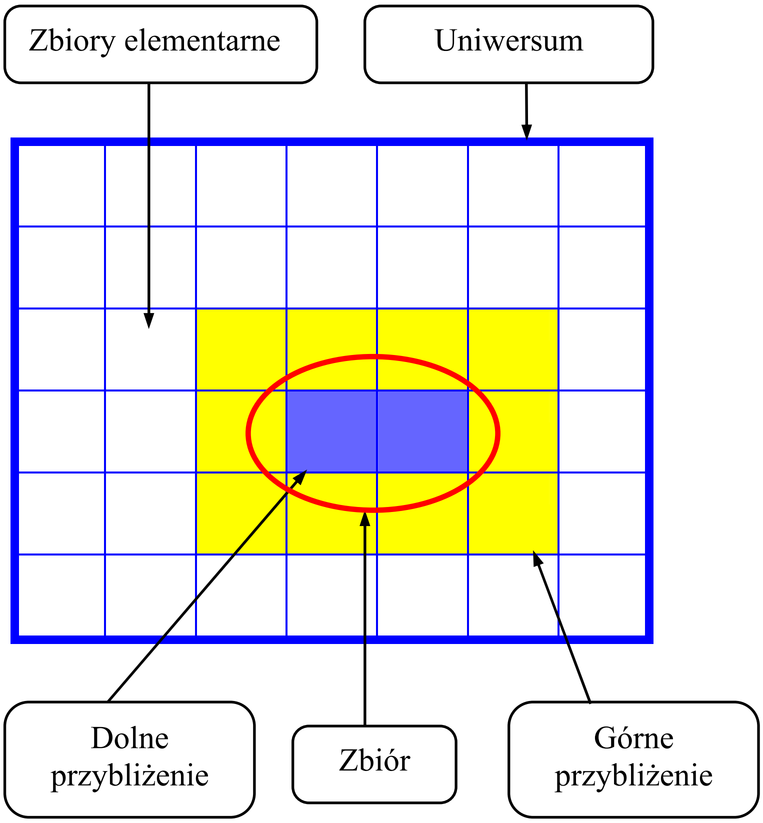
9) $B^*(-X) = -B_*(X)$,

10) $B_*(B_*(X)) = B^*(B_*(X)) = B_*(X)$,

11) $B^*(B^*(X)) = B_*(B^*(X)) = B^*(X)$.

Z własności tych widać, że przybliżenia stanowią wnętrze i domknięcie w topologii generowanej przez dane.

Graficzna ilustracja przybliżenia pokazana jest na Rys. 1.



Rys. 1

Zbiór przybliżony X może być scharakteryzowany ilościowo za pomocą współczynnika dokładności przybliżenia:

$$\alpha_B(X)=\frac{|B_*(X)|}{|B^*(X)|}$$

gdzie $|X|$ oznacza liczność zbioru X.

Przybliżenia zbiorów stanowią podstawowe matematyczne pojęcia teorii zbiorów przybliżonych i służą do opisu nieprecyzyjnej wiedzy o interesujących nas zjawiskach. Następnie są one używane do znajdywania zależności w danych, ale tą problematyką nie będziemy się zajmować.

5. CO DALEJ?

W wielu ośrodkach badawczych w Polsce, USA, Kanadzie, Japonii, Chinach, Indiach i w Europie prowadzone są intensywne prace dotyczące różnych aspektów teorii zbiorów przybliżonych. Obejmują one między innymi:

- aspekty filozoficzne
- podstawy matematyczne
- różne uogólnienia i rozszerzenia
- związki z innymi podobnymi teoriami
- różnorodne zastosowania
- oprogramowanie
- prace konstrukcyjne

Teorię zbiorów przybliżonych można uważać za szczególny przypadek realizacji idei Fregego dotyczącej pojęć nieostrych (*vagueness*). Istniej pogląd, że teoria zbiorów przybliżonych daje tu nowe narzędzie do badania logiki pojęć nieostrych, w szczególności wyjaśnia ona niektóre paradoksy nieostrości (*the soritex paradox*) i wielu filozofów i logików prowadzi badania w tym kierunku (patrz [5]).

Pojęcie nierozróżnialności (*indiscernibility relation*), stanowiące podstawę teorii zbiorów przybliżonych, jest ściśle związane z podaną przez Leibniza zasadą „nierozróżnialności identycznych obiektów" (*indiscernibility of identicals*). Ten aspekt zbiorów przybliżonych zainteresował również wielu filozofów, którzy prowadza badania w tym zakresie.

Prace dotyczące podstaw teoretycznych zbiorów przybliżonych obejmują:

- algebraiczne i topologiczne własności
- różne logiki związane ze zbiorami przybliżonymi
- aspekty probabilistyczne zbiorów przybliżonych, między innymi związki z twierdzeniem Bayesa
- aspekty teorio mnogościowe zbiorów przybliżonych w tym związki z mereologią Leśniewskiego

- analizę przybliżoną, funkcje przybliżone, przybliżoną ciągłość, przybliżone różniczkowanie i całkowanie (nie w sensie metod numerycznych a w sensie analizy niestandardowej)

W wyżej podanych kierunkach prowadzone są liczne badania mające na celu pełniejsze wyjaśnienie podstaw teorii zbiorów przybliżonych, z punktu widzenia szeroko rozumianych ich własności matematycznych.

Teoria zbiorów przybliżonych jest uogólniana i modyfikowana na wiele sposobów. Między zamiast relacji równoważności, stanowiącej punkt wyjścia do definicji zbioru przybliżonego, przyjmowane są inne relacje (np. relacja tolerancji). Bardzo dużym zainteresowaniem cieszą się również badania dotyczące sformułowania podstaw teorii zbiorów przybliżonych w oparciu o pewne koncepcje prawdopodobieństwa.

Ważne są również badania dotyczące związków teorii zbiorów przybliżonych z innymi teoriami dotyczącymi formalnych modeli nieprecyzyjności pojęć takich jak:

- teoria zbiorów rozmytych
- teoria ewidencji Dempstera- Shafera
- metody statystyczne analizy danych

Teoria zbiorów przybliżonych została również użyta do rozszerzenia niektórych znanych teorii, takich jak np. sieci neuronowe *(rough neural networks*), czy sieci Petriego (*rough Petri networks*). Są to obiecujące kierunki uprawiane przez wielu badaczy.

Bardzo intensywnie prowadzone są prace nad różnymi nowatorskimi zastosowaniami tej teorii. Obejmują one, między innymi teorię decyzji, medycynę, ekonomię, teorię sterowania i teorię konfliktów.

Szersze zastosowania omawianej teorii wymagają odpowiedniego oprogramowania. Zostało opracowanych wiele systemów służących do tego celu i w dalszym ciągu prowadzone są w tym zakresie intensywne prace.

Wreszcie aby w pełni wykorzystać możliwości jakie daje teoria zbiorów przybliżonych w analizie danych konieczne jest opracowanie komputerów lepiej przystosowanych do spożytkowania zalet tej teorii. Prace w tym kierunku prowadzone są na uniwersytecie w Osace. Miejmy nadziej, że doprowadzą one do powstania nowych koncepcji komputerów, lepiej przystosowanych do analizy danych.

Bliższe informacje na poruszane tu tematy można znaleźć w Internecie.

5. ZAKOŃCZENIE

Podane tu sformułowanie podstawowych pojęć teorii zbiorów przybliżonych jest bardzo proste, jednakże do celów praktycznych jest ono niewystarczające. Aby podejście to mogło być stosowane do rozwiązywania rzeczywistych problemów wymagało ono wielu rozszerzeń i uzupełnień. Pozwoliło to stworzenie narzędzia matematycznego, które mogło być z powodzeniem zastosowane do rozwiązywania złożonych problemów. Zainteresowany czytelnik znajdzie odpowiednie dane w Internecie.

Teoria zbiorów przybliżonych, jak to stwierdzono poprzednio, nie jest alternatywna dla klasycznej teorii zbiorów. Jest ona pewną formalizacją pojęć nieprecyzyjnych (nieostrych) w terminach, pojęć precyzyjnych. Pojęcie nieprecyzyjne jest przedstawione w tej teorii za pomocą dwu pojęć precyzyjnych (dolnego i górnego przybliżenia), co pozwala na operowaniem klasycznym aparatem teorii mnogości do wyrażania i analizy pojęć nieprecyzyjnych.

Teoria zbiorów przybliżonych znalazła liczne zastosowania, jednakże dalszy jej rozwój wymaga nadal badania jej podstaw matematycznych. Konieczne jest także ogólnie dostępnego oprogramowanie oparte na tej metodzie, a także odpowiednie rozwiązania sprzętowe.

Prace w tym zakresie prowadzono w wielu krajach.

LITERATURA

[1] George Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883

[2] Gottlob Frege, Grundlagen der Arithmetik, 2 Verlag von Herman Pohle, Jena, 1893

[3] Roman Murawski, Filozofia matematyki, antologia tekstów klasycznych, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Seria Filozoficzna I, Logika nr 46, Poznań, 1986

[4] Zdzisław Pawlak, Rough sets, Int. J. of Information and Computer Sciences, 11, 5, 341-356, 1982

[5] Read Stephen, Thinking about logic, Introduction to the philosophy of logic, Opus, Oxford, new York, Oxford University Press, 1995

[6] Lotfi Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353, 1965