ZUR DARSTELLUNGSTHEORIE UND INVARIANTEN-ABZÄHLUNG DER PROJEKTIVEN, DER KOMPLEX- UND DER DREHUNGSGRUPPE.

VON

H. WEYL

in ZÜRICH.

Gestützt auf CARTAN's umfassende Untersuchungen über infinitesimale Gruppen[1] und vor allem auf die tief eindringende Charakteristiken-Methode, welche I. SCHUR nach dem Muster der endlichen Gruppen (FROBENIUS) an der reellen Drehungsgruppe entwickelte[2], habe ich kürzlich eine allgemeine Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen aufgestellt.[3] Zu den halb-einfachen gehören insbesondere die Gruppe $\mathfrak{g}\,1$ aller homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1 sowie die Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$ und die Komplexgruppe $\mathfrak{c}$, welche in der ersten enthalten sind. Von den Formeln ihrer primitiven Charakteristiken sollen hier einige naheliegende Anwendungen gemacht werden. Die erste betrifft die *Abzählung von Invarianten;* es war dieses Problem, von welchem I. SCHUR seinen Ausgang nahm, und für die Zwecke der Invariantentheorie stellte HURWITZ zuerst jenen das Kontinuum der Gruppe als Integrationsgebiet verwendenden Integralkalkül auf, der die Seele der SCHURschen Methode ist. — Die zweite Anwendung betrifft die folgende Frage: jede primitive (irreduzible) Darstellung der Gruppen $\mathfrak{g}\,1$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in ν Dimensionen liefert zugleich eine Darstellung der entsprechenden Gruppe in $\nu - 1$ Dimensionen; wie setzt diese sich aus primitiven zusammen? — Endlich dehne ich

---

[1] Vor allem die Thèses (Paris 1894) und: Bull. Soc. Math. de France *41*, p. 53.

[2] Drei Abhandlungen in den Sitzungsber. d. Preuss. Akademie 1924, p. 189, p. 297, p. 346 (zitiert als: Schur *1*, *2*, *3*).

[3] Drei Abhandlungen in der Math. Zeitschr. 1925, Bd. *23*, p. 271, Bd. *24*, p. 328 und p. 377 (zitiert als: I, II, III).

drittens die Charakteristikenformeln für die Gruppe $\mathfrak{d}$ auf die Gruppe $\mathfrak{d}'$ aller orthogonalen Transformationen aus, welche neben den eigentlichen auch die uneigentlichen Operationen von der Determinante -1 enthält.

§ 1. Rekapitulation.

Wir operieren im zentrierten affinen Raum $\mathfrak{r}$ von ν Dimensionen. Statt $\mathfrak{g}$ 1 werden wir hier (obwohl sie nicht halb-einfach ist) die volle Gruppe $\mathfrak{g}$ *aller* homogenen linearen Transformationen von nicht-verschwindender Determinante betrachten. Im Falle der Komplexgruppe ist ν notwendig gerade $=2n$, im Falle der Drehungsgruppe unterscheiden wir ungerade und gerade Dimensionszahl: $\nu=2n+1$ oder $\nu=2n$. Die vier behandelten Klassen von Gruppen sind also — und wir werden fortan immer diese Reihenfolge innehalten —:

$$\mathfrak{g}, \nu=n; \quad \mathfrak{c}, \nu=2n; \quad \mathfrak{d}, \nu=2n+1; \quad \mathfrak{d}, \nu=2n.$$

Dem »schiefen» und dem »skalaren» Produkt, d. i. der invarianten schiefsymmetrischen bezw. symmetrischen Bilinearform zweier Vektoren

$$x=\{x_0\}, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n' \text{ und } y,$$

welche der Definition der Gruppe $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ zugrunde liegen — das in $\{\ \}$ gesetzte Glied tritt nur bei ungerader Dimensionszahl auf —, geben wir die Gestalt

$$(1) \qquad [xy] = \qquad (x_1 y_1' - y_1 x_1') + \cdots + (x_n y_n' - y_n x_n'),$$

$$(2) \qquad (xy) = \{x_0 y_0\} + (x_1 y_1' + y_1 x_1') + \cdots + (x_n y_n' + y_n x_n').$$

Indem wir uns innerhalb der Gruppen auf die unitären Transformationen beschränken, entstehen die geschlossenen Kontinua $\mathfrak{g}_u$, $\mathfrak{c}_u$, $\mathfrak{d}_u$. Innerhalb dieser Gruppen ist jede Transformation τ zu einer »Haupttransformation» (ε) konjugiert, in deren Matrix nur die Hauptdiagonale mit Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ besetzt ist, welche nicht verschwinden. Die ε sind vom absoluten Betrage 1. Wir setzen ein für allemal

$$\varepsilon = e^{2\pi i \varphi} = e(\varphi), \quad c(\varphi) = e(\varphi) + e(-\varphi), \quad s(\varphi) = e(\varphi) - e(-\varphi).$$

Im Falle $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ sind die ε zu je zweien reziprok:

$$\{\varepsilon_0 = 1\}; \; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n; \; \varepsilon_1' = \frac{1}{\varepsilon_1}, \ldots, \varepsilon_n' = \frac{1}{\varepsilon_n}.$$

Die nur mod. 1 bestimmten Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$:

$$\varepsilon_1 = e(\varphi_1), \quad \varepsilon_2 = e(\varphi_2), \ldots, \quad \varepsilon_n = e(\varphi_n)$$

heissen die Drehwinkel der Operation τ. Das Volumen

$$d\Omega = \Delta \bar{\Delta}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n$$

desjenigen Teiles, welcher aus der Gruppe $\mathfrak{g}_u$, $\mathfrak{c}_u$ oder $\mathfrak{d}_u$ dadurch ausgeschnitten wird, dass man die Drehwinkel auf den Spielraum $\varphi_i \ldots \varphi_i + d\varphi_i$ beschränkt, berechnet sich für die vier unterschiedenen Gruppen aus:

$$\Delta = \prod_{i>k} \left(e(\varphi_i) - e(\varphi_k)\right),$$

$$\Delta = \prod_i s(\varphi_i) \cdot \prod_{i>k} \left(c(\varphi_i) - c(\varphi_k)\right),$$

$$\Delta = \prod_i s\left(\frac{\varphi_i}{2}\right) \cdot \prod_{i>k} \left(c(\varphi_i) - c(\varphi_k)\right),$$

$$\Delta = \prod_{i>k} \left(c(\varphi_i) - c(\varphi_k)\right).$$

Die Indizes i und k durchlaufen die Werte von 1 bis n, $\bar{\alpha}$ bezeichnet allgemein die zu α konjugiert-komplexe Zahl.

Bei einer primitiven oder irreduziblen Darstellung der Gruppe durch lineare Transformationen in N Variablen (N-dimensionale Darstellung) kann man das Koordinatensystem im N-dimensionalen Bildraum immer so wählen, dass den Haupttransformationen (ε) Haupttransformationen (E) korrespondieren; und zwar stehen in der Hauptdiagonale von (E) lauter Terme von der Gestalt

$$e(\Phi_k), \qquad \Phi_k = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \cdots + k_n \varphi_n.$$

Die vorkommenden Linearformen Φ_k heissen die *Gewichte;* die Summe der $e(\Phi_k)$ ist die *Spur* von (E) und damit zugleich die Spur $\chi(\tau)$ derjenigen Transformation T, welche in der Darstellung dem Element τ der gegebenenen Gruppe korrespondiert. Wenn wir uns bei $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{g}$ auf die *eindeutigen* Darstellungen beschränken (für $\mathfrak{d}$ existieren auch zweideutige, für $\mathfrak{g}$ sogar unendlichvieldeutige), so sind die Koeffizienten k ganze Zahlen. Die endliche Fourierreihe χ ist invariant gegenüber denjenigen auf die φ auszuübenden Substitutionen S, welche (ε) in ein konjugiertes Element seiner Gruppe überführen. Die Gruppe der S besteht im Falle $\mathfrak{g}$ aus allen Permutationen; im Falle $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$, $\nu = 2n + 1$ sind ihre Erzeugenden die Transpositionen und die Vorzeichenänderungen an je einer Variablen φ, im Falle

$\mathfrak{d}, \nu = 2n$ die Transpositionen und die Vorzeichenänderungen an je einem Variablenpaar. Die Ordnungen sind bezw. $= n!$, $2^n \cdot n!$, $2^{n-1} \cdot n!$. Bei lexikographischer Anordnung der Glieder von χ — nach dem Prinzip, dass $k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_n\varphi_n$ höher steht als $k'_1\varphi_1 + k'_2\varphi_2 + \cdots + k'_n\varphi_n$, wenn die letzte von 0 verschiedene der Differenzen $k_1 - k'_1, k_2 - k'_2, \ldots, k_n - k'_n$ positiv ist — tritt ein höchstes Gewicht auf

$$\Phi = g_1\varphi_1 + g_2\varphi_2 + \cdots + g_n\varphi_n; \tag{3}$$

dieses ist stets von der Multiplizität 1 und bestimmt die primitive Darstellung eindeutig. Die ganzen Zahlen g_i genügen jenen Ungleichungen, welche ausdrücken, dass Φ nicht tiefer steht als die äquivalenten (aus Φ durch die Substitutionen S hervorgehenden) Linearformen.

Um die *Charakteristiken* χ bequem ausdrücken zu können, habe ich die *Elementarsummen* eingeführt:

$$\xi(l) = \sum_{(S)} \pm e(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \cdots + l_n\varphi_n).$$

Die Summe erstreckt sich alternierend über diejenigen Terme, die sich aus dem hingeschriebenen durch Ausübung der Substitutionen S ergeben. In Determinantenform ist

$$\xi(l) = |\varepsilon_i^{l_k}| \qquad (\mathfrak{g}),$$

$$\xi(l) = |\varepsilon_i^{l_k} - \varepsilon_i^{-l_k}| \qquad (\mathfrak{c} \text{ und } \mathfrak{d}, \nu = 2n+1),$$

$$2\xi(l) = |\varepsilon_i^{l_k} + \varepsilon_i^{-l_k}| + |\varepsilon_i^{l_k} - \varepsilon_i^{-l_k}| \qquad (\mathfrak{d}, \nu = 2n).$$

Stets ist $\Omega = \int d\Omega$ (die Integration erstreckt sich nach allen Winkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ von 0 bis 1) gleich der Ordnung der S-Gruppe, ferner $\Delta = \xi(l^0)$ mit

$$\begin{aligned} (l_1^0, l_2^0, \ldots, l_n^0) &= (0, 1, \ldots, n-1) &&: \quad \mathfrak{g} \text{ und } \mathfrak{d}, \nu = 2n; \\ &= (1, 2, \ldots, n) &&: \quad \mathfrak{c}; \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n - \frac{1}{2}\right) &&: \quad \mathfrak{d}, \nu = 2n+1. \end{aligned}$$

Die Charakteristik χ der primitiven Darstellung vom höchsten Gewicht (3) aber berechnet sich aus der Formel

$$\chi = \frac{\xi(l)}{\xi(l^0)}, \qquad l_i = g_i + l_i^0.$$

Die verschiedenen χ bilden ein Orthogonalsystem für das Integrationselement $d\Omega$. Jede (bei $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{d}$ scilicet: eindeutige) Darstellung zerfällt in primitive.

§ 2. Die Formeln für die Invariantenabzählung.

Liegt eine M-dimensionale Darstellung $\mathfrak{H}: \tau \to T$ vor, so versteht man unter einer zugehörigen *Invariante* ι eine Linearform der Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_M$ des Bildraumes, welche durch die sämtlichen Transformationen T in sich übergeht. Ist X die Charakteristik der Darstellung $\mathfrak{H}$, so ist nach Schur die Anzahl der linear unabhängigen zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Invarianten[1]

$$= \frac{1}{\Omega} \int X(\varphi)\, d\Omega.$$

Der Begriff der (skalaren) Invariante ist zu verallgemeinern zu dem der *invarianten Grösse.* Es sei $\mathfrak{h}: \tau \to t$ die primitive μ-dimensionale Darstellung mit dem höchsten Gewicht (3); eine zu $\mathfrak{H}$ gehörige invariante Grösse vom Typus $\mathfrak{h}$ oder vom Typus $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ ist ein System von μ Linearformen $(\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_\mu)$ der Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_M$, welche untereinander die Transformation t erleiden, wenn T auf die Variabeln y ausgeübt wird; dabei sind t, T die beiden Transformationen, welche in den Darstellungen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{H}$ demselben willkürlichen Element τ unserer Gruppe entsprechen. Die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen beträgt, wenn χ den Charakter der Darstellung $\mathfrak{h}$ bezeichnet[2]:

$$A = \frac{1}{\Omega} \int X(\varphi)\, \bar{\chi}(\varphi)\, d\Omega.$$

Wir wollen jetzt $\mathfrak{H}$ spezialisieren. Es sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ ein willkürlicher Vektor des zugrunde liegenden Raumes $\mathfrak{r}$. Jede homogene Funktion der Ordnung r von x ist eine lineare Kombination der sämtlichen Monome

$$y = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_\nu^{i_\nu}, \tag{4}$$

deren Exponentensumme $= r$ ist. Die Monome erfahren bei Ausübung der Transformation τ auf die Koordinaten x untereinander eine Substitution T; da (4) sich durch die Haupttransformation (ε) mit $\varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \ldots \varepsilon_\nu^{i_\nu}$ multipliziert, ist die Charakteristik X dieser Darstellung $\mathfrak{H}: \tau \to T$ gleich

[1] Schur *1*, p. 201.

[2] III, p. 393, Formel (24).

$$\sum_{(i_1+i_2+\cdots+i_\nu=r)} \varepsilon_1^{i_1}\varepsilon_2^{i_2}\ldots\varepsilon_\nu^{i_\nu}$$

oder gleich dem Koeffizienten von z^r in der Potenzentwicklung des Reziproken der Funktion

$$f(z)=(1-\varepsilon_1 z)(1-\varepsilon_2 z)\ldots(1-\varepsilon_\nu z).$$

Dies charakteristische Polynom ist, wenn δ die ν-dimensionale Einheitsmatrix bedeutet,

$$f(z)=\det(\delta-z\tau).$$

Sind allgemeiner $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots$ mehrere willkürliche, insgesamt e Vektoren in $\mathfrak{r}$ und wollen wir diejenigen Invarianten oder diejenigen invarianten Grössen von bestimmtem Typus $\mathfrak{h}$ finden, welche ganze rationale Funktionen von $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{e}{x}$ bezw. der Ordnung $r_1, r_2, \ldots, r_e$ sind, so ist für X der Koeffizient von $z_1^{r_1} z_2^{r_2}\ldots z_e^{r_e}$ in der Potenzentwicklung der Funktion

$$\frac{1}{f(z_1)f(z_2)\ldots f(z_e)}$$

zu nehmen. Es ist klar, dass solche invarianten Grössen nur für die eindeutigen Darstellungstypen $\mathfrak{h}$ existieren, die τ ein ganz rational von τ abhängiges t zuordnen.

Satz. Um die Anzahl $A_{r_1 r_2 \ldots r_e}$ der linear unabhängigen unter denjenigen invarianten Grössen von gegebenem Typus $\mathfrak{h}$, welche von e willkürlichen Vektoren ganz rational bezw. in der Ordnung $r_1, r_2, \ldots, r_e$ abhängen, simultan für alle Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_e$ zu bestimmen, hat man die erzeugende Funktion

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_e)=\sum_{r=0}^{\infty} A_{r_1 r_2 \ldots r_e} z_1^{r_1} z_2^{r_2}\ldots z_e^{r_e}$$

zu konstruieren. Es ist

$$F=\frac{1}{\Omega}\int\frac{\bar{\chi}(\varphi)\,d\Omega}{f(z_1)f(z_2)\ldots f(z_e)}. \tag{5}$$

(Konvergenz herrscht dort, wo alle z dem absoluten Betrage nach < 1 sind.)

Gruppe $\mathfrak{g}$. Von irgend welchen Grössen $z_1, z_2, \ldots$ bedeute

$$D(z)=\prod_{i>k}(z_i-z_k)$$

das Differenzenprodukt. Ist $\mathfrak{h}$ die Darstellung vom höchsten Gewicht

$$g_1\varphi_1 + g_2\varphi_2 + \cdots + g_n\varphi_n \qquad (g_1 \leqq g_2 \leqq \cdots \leqq g_n)$$

— es ist klar, dass $g_1 \geqq 0$ sein muss, wenn überhaupt invariante Grössen der gewünschten Art existieren sollen —, so setze man wie oben

$$l_1 = g_1, \qquad l_2 = g_2 + 1, \ldots, \qquad l_n = g_n + n - 1.$$

Dann ist nach § 1

$$\Delta = D(\varepsilon), \qquad \Delta\chi = |\,\varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n}\,|, \qquad \Omega = n!.$$

Der Zähler unter dem Integralzeichen der Formel (5) lautet mithin

$$|\,\varepsilon^{-l_1}, \varepsilon^{-l_2}, \ldots, \varepsilon^{-l_n}\,|\, D(\varepsilon)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n.$$

Löst man die Determinante in ihre $n!$ Glieder auf, so liefert jedes den gleichen Beitrag zum Integral, da die verschiedenen Bestandteile durch die Vertauschungen der Variablen φ_i ineinander übergehen. Infolgedessen haben wir

$$(6) \qquad F = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varepsilon_1^{-l_1}\varepsilon_2^{-l_2} \ldots \varepsilon_n^{-l_n} D(\varepsilon)}{f(z_1)f(z_2)\ldots f(z_e)}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \cdots d\varphi_n.$$

Nach dem Vorgange von Schur[1] rechnen wir zunächst den Fall $e = n$ durch und übertragen hernach das Resultat successive auf $e = n+1,\ n+2, \ldots$. (Die Fälle $e < n$ sind natürlich in der Formel für $e = n$ mitenthalten.)

1) $e = n$. Wir multiplizieren $F(z)$ mit $D(z)$. Nach einer vielgebrauchten Formel von Cauchy ist

$$\frac{D(z)\,D(\varepsilon)}{f(z_1)\ldots f(z_n)} = \left|\frac{1}{1 - \varepsilon_i z_k}\right|.$$

Berücksichtigen wir in der Determinante rechts zunächst das Hauptglied, so haben wir das folgende Integral zu berechnen

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varepsilon_1^{-l_1}\varepsilon_2^{-l_2} \ldots \varepsilon_n^{-l_n}}{(1-\varepsilon_1 z_1)(1-\varepsilon_2 z_2)\ldots(1-\varepsilon_n z_n)}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \cdots d\varphi_n.$$

Dies zerfällt aber in ein Produkt einfacher Integrale von der Form

---

[1] Schur p. 2, 307.

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon^{-l}}{1-\varepsilon z}\,d\varphi = z^l \qquad (|z|<1;\ l\geqq 0).$$

(Wenn die ganze Zahl $l<0$ ist, bekommt das Integral den Wert 0 — im Einklang damit, dass für $g_1<0$ überhaupt keine invariante Grösse vom Typus $\mathfrak{h}$ existiert, die eine ganze rationale Funktion der Vektoren $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots$ ist). Das Integral I hat demnach den Wert $z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_n^{l_n}$; die übrigen zu berücksichtigenden Glieder gehen daraus durch Vertauschung von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ hervor. Unser Resultat ist demnach

$$F(z) = \frac{|z^{l_1}, z^{l_2}, \ldots, z^{l_n}|}{|1, z, \ldots, z^{n-1}|} \qquad \text{für } e=n. \tag{7}$$

2) *Übergang von* $e\,(\geqq n)$ *auf* $e+1$. Wir werden, auf Grund der eben gewonnenen Erfahrung, allgemein

$$D(z_1, z_2, \ldots, z_e)\,F(z_1, z_2, \ldots, z_e) = F^*(z_1, z_2, \ldots, z_e)$$

setzen. Wir gehen zur nächst höheren Argumentzahl $e+1$ über, indem wir ein weiteres Argument z_0 einführen. Die letzte Kolonne in

$$D(z_0, z_1, \ldots, z_e) = |1, z, \ldots, z^e|$$

kann dann ersetzt werden durch

$$z^{e-n} \cdot \frac{f(z)}{(-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}.$$

Tut man dies, so erhält man aus (6) eine Rekursionsformel für F^*:

$$F^*_{(l)}(z_0, z_1, \ldots, z_e) = (-1)^{e-n}\{z_0^{e-n} F^*_{(l+1)}(z_1, z_2, \ldots, z_e) - + \cdots\}.$$

Der Index (l) deutet auf das System der ganzen Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ hin; in $(l+1)$ sind alle diese Zahlen um 1 erhöht. Die Summe in der geschweiften Klammer besteht aus $e+1$ alternierenden Termen, in denen $z_0, z_1, \ldots, z_e$ der Reihe nach die Rolle übernehmen, welche z_0 im hingeschriebenen Glied spielt. Daraus gewinnen wir sofort $F^*(z_1, z_2, \ldots, z_e)$ in Gestalt einer Determinante[1]:

[1] Den Grundgedanken des Schurschen Induktionsschlusses (Schur *2*, pp. 307—311) habe ich hier so modifiziert, dass er für alle e zu einer geschlossenen Formel führt.

$$\left| 1, z, \ldots, z^{e-n-1} \,\vdots\, z^{e-n+l_1}, \ldots, z^{e-n+l_n} \right|.$$

Denn der behauptete Ausdruck ist richtig für $e=n$ und erfüllt beim Übergang von e auf $e+1$ die aufgestellte Rekursionsformel. Schreiben wir noch zur Abkürzung $e-n=f$, so lässt sich das Ergebnis in die Gleichung fassen:

$$F = \frac{\left| 1, z, \ldots, z^{f-1} \,\vdots\, z^{f+g_1}, \ldots, z^{(e-1)+g_n} \right|}{\left| 1, z, \ldots, z^{f-1} \,\vdots\, z^{f}, \ldots, z^{e-1} \right|}. \tag{8}$$

Gruppe c. Für irgendwelche Grössen $z_1, z_2, \ldots$ schreiben wir

$$\Gamma(z) = \prod_{i<k} \left\{ \left(z_i + \frac{1}{z_i}\right) - \left(z_k + \frac{1}{z_k}\right) \right\} = \left| \ldots, z^2 + z^{-2}, z + z^{-1}, 1 \right|$$

und daneben mit anderm Vorzeichen

$$\Gamma'(z) = D\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left| 1, z + z^{-1}, z^2 + z^{-2}, \ldots \right|.$$

Die integrale Grundformel (5) vereinfacht sich auf die gleiche Art wie vorhin zunächst zu:

$$F = \frac{1}{2^n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Pi\{(\varepsilon^{-l} - \varepsilon^{l})(\varepsilon - \varepsilon^{-1})\} \cdot \Gamma'(\varepsilon)}{\Pi f(z)} \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \cdots d\varphi_n.$$

Das Produkt Π erstreckt sich stets über einen von 1 bis e, bezw. von 1 bis n laufenden Index, der dem Zeichen z, bezw. φ, ε, l anzuhängen ist.

$$(\varepsilon^{-l} - \varepsilon^{l})(\varepsilon - \varepsilon^{-1}) = \varepsilon^{l-1}(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon^{-(l-1)}(1 - \varepsilon^{-2}).$$

Gemäss den beiden Summengliedern auf der rechten Seite zerfällt das Integral nach φ_1 in zwei gleiche Teile, die durch die Substitution $\varphi_1 \rightarrow -\varphi_1$ ineinander übergehen. Das Gleiche gilt für $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$; daher

$$F = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Pi\{\varepsilon^{l-1}(1 - \varepsilon^2)\} \cdot \Gamma'(\varepsilon)}{\Pi f(z)} \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \cdots d\varphi_n.$$

1. $e=n$. $f(z)$ ist

$$= z^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \left\{ \left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(\varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i}\right) \right\} = z^n \cdot f^*(z).$$

Für

$$F^*(z) = (\Pi z)^n \varDelta(z)\, F(z)$$

bekommt man demnach einen Ausdruck, in welchem man nach der Cauchyschen Formel

$$\frac{\varDelta(z)\cdot\varDelta'(\varepsilon)}{f^*(z_1)\dots f^*(z_n)} \text{ ersetzen kann durch } \Pi z\cdot\left|\frac{1}{(1-\varepsilon_i z_k)(1-\varepsilon_i^{-1} z_k)}\right|.$$

Für das Hauptglied der rechts stehenden Determinante bricht das n-fache Integral wieder auseinander in ein Produkt einfacher Integrale vom Typus

$$\int\limits_0^1 \frac{\varepsilon^{l-1}(1-\varepsilon^2)\,d\varphi}{(1-\varepsilon z)(1-\varepsilon^{-1}z)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varepsilon^{l-1}(1-\varepsilon^2)\,d\varepsilon}{(1-\varepsilon z)(\varepsilon - z)},$$

dessen Wert gleich z^{l-1}, dem Residuum im einzigen innerhalb des Einheitskreises gelegenen Pole $\varepsilon = z$ ist; und wir finden schliesslich

$$F^*(z) = |z^{l_1}, z^{l_2}, \dots, z^{l_n}| \qquad \text{für } e=n. \tag{9}$$

2. *Übergang von e auf $e+1$* durch Hinzufügung eines Arguments z_0. In

$$\varDelta(z) = |z^e + z^{-e}, \dots, z+z^{-1}, 1| \qquad (z=z_0, z_1, \dots, z_e)$$

kann $z^e + z^{-e}$ ersetzt werden durch

$$(z^{e-n} + z^{-(e-n)})\, f^*(z).$$

Darum ergibt sich die Rekursionsformel (für $e=n$ ist der erste Faktor rechts zu ersetzen durch 1):

$$F^*(z_0, z_1, \dots, z_e) = (z_0^{e-n} + z_0^{-(e-n)})\; F^*(z_1, \dots, z_e) - + \cdots$$

und damit

$$F^*(z_1, \dots, z_e) = |z^{e-n-1} + z^{-e+n+1}, \dots, 1 \mid z^{l_1}, \dots, z^{l_n}|,$$

$$F = \frac{|1+z^{2(f-1)}, \dots, z^{f-2}+z^f, z^{f-1} \mid z^{f+g_1}, \dots, z^{(e-1)+g_n}|}{|1+z^{2(e-1)}, \dots, z^{e-2}+z^e, z^{e-1}|}. \tag{10}$$

Gruppe $\mathfrak{d}$, $\nu = 2n+1$. Die Behandlung ist ganz analog. $f(z)$ ist

$$= (1-z)\, z^n f^*(z), \quad f^*(z) = \prod_{i=1}^{n}\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right) - \left(\varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i}\right)\right\}.$$

Setzt man einen Augenblick $l_i = k_i + \frac{1}{2}$, um auf ganze Zahlen k_i zu kommen, so erhält man im Falle $e=n$:

$$\Pi(1-z)\cdot \Pi z^n \cdot \nabla(z)\cdot F(z) = \frac{|z^{k_1+1}, z^{k_2+1}, \ldots, z^{k_n+1}|}{\Pi(1+z)}.$$

Den F vorzusetzenden Faktor wählt man so, dass sich für $e=n$ eine Determinante ergibt; man führt also allgemein

$$\Pi\{(1-z)(z^{1/2}+z^{-1/2})z^n\}\cdot \nabla(z) F = F^*$$

ein und hat dann

(11) $$F^* = |z^{l_1}, z^{l_2}, \ldots, z^{l_n}| \qquad \text{für } e=n.$$

Beim Übergang von e auf $e+1$ ersetzt man in der Determinante

$$\Pi(z^{1/2}+z^{-1/2})\cdot \nabla(z) = |z^{e+\frac{1}{2}} + z^{-(e+\frac{1}{2})}, \ldots, z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}| \qquad (z = z_0, z_1, \ldots, z_e)$$

das Glied in der ersten Kolonne durch

$$(z^{e-n+\frac{1}{2}} + z^{-(e-n+\frac{1}{2})})\cdot f^*(z)$$

und kommt auf diesem Wege zu:

(12) $$F = \frac{|1+z^{2f-1}, \ldots, z^{f-1}+z^f \mid z^{f+g_1}, \ldots, z^{(e-1)+g_n}|}{\Pi(1-z^2)\cdot |1+z^{2(e-1)}, \ldots, z^{e-2}+z^e, z^{e-1}|}.$$

Gruppe $\mathfrak{d}$, $\nu=2n$. Mit denselben Bezeichnungen lautet das auf dem gleichen Wege gewonnene Resultat hier:

(13) $$F = \frac{|1-z^{2f}, \ldots, z^{f-1}-z^{f+1} \mid z^{f+g_1}, \ldots, z^{(e-1)+g_n}|}{\Pi(1-z^2)\cdot |1+z^{2(e-1)}, \ldots, z^{e-2}+z^e, z^{e-1}|}.$$

§ 3. **Diskussion der Formeln.**

Gruppe $\mathfrak{g}$. Was in der klassischen Invariantentheorie als Invariante »vom Gewichte g« bezeichnet wird: eine einzelne ganze rationale Funktion ι mehrerer willkürlicher Vektoren, die bei einer beliebigen Koordinatentransformation τ des zugrunde liegenden zentrierten affinen Raumes sich mit der g-ten Potenz der Transformationsdeterminante multipliziert, tritt hier als invariante Grösse vom

Typus $(g, g, \ldots, g)$ auf. Nach dem »ersten Fundamentalsatz» ist jede solche Invariante ein Aggregat derjenigen Determinanten, die sich aus irgend n unter den Argumentvektoren bilden lassen. Zwischen diesen Determinanten bestehen Relationen, die im »zweiten Fundamentalsatz» aufgezählt werden, jedoch ihrerseits wieder durch Beziehungen untereinander verknüpft sind; und es gelingt kaum, das Gewirr dieser »Syzygien» so vollständig zu durchblicken, dass man daraus ableiten könnte, wie viele linear unabhängige Invarianten von gegebener Ordnung $r_1, r_2, \ldots, r_e$ in den Argumentvektoren schliesslich sich ergeben. Hier springt unsere transzendente Methode ein: sie liefert jene Anzahlen als die Koeffizienten einer ganzen rationalen Funktion F von e Argumenten $z_1, z_2, \ldots, z_e$, deren Nenner die Determinante bildet

$$\left| 1, z, \ldots, z^{e-1} \right|$$

und deren Zähler daraus so entsteht, dass man die Exponenten der letzten n Kolonnen um g erhöht. (Es ist klar, dass nur solche Invarianten vom Gewichte g vorkommen können, deren Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_e$ die Summe ng ergeben.) So erhellen der erste Fundamentalsatz und diese Anzahlbestimmung die beiden äussersten Enden eines Zusammenhangs, den wir in allen seinen Stufen nicht völlig durchschauen können. Nur bei der niedrigsten Argumentzahl, die überhaupt etwas liefert, $e=n$, fallen Anfang und Ende in eins; da lehrt die Formel

$$F=(z_1 z_2 \ldots z_n)^g$$

direkt, dass nur eine einzige Invariante vom Gewichte g existiert, nämlich die g-te Potenz der aus den Argumentvektoren gebildeten Determinante. (Und von hier nimmt der Beweis des ersten Fundamentalsatzes seinen Ausgang, indem auf die höheren Fälle geschlossen wird mittels jener einfachen CAPELLIschen Identität — vergl. etwa WEYL, Math. Zeitschrift *20*, p. 134, Formel (2) —, in welcher die Zahl der Argumentvektoren die Dimensionszahl übersteigt und der CAYLEYsche Ω-Prozess nicht auftritt.)

Ähnlich einfache Gesetze beherrschen die Anzahlen der linear unabhängigen invarianten Grössen von beliebigem Typus $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$. Besonders merkwürdig ist hier die Formel (7) im niedrigsten Falle $e=n$, weil sie ganz und gar übereinstimmt mit der Formel für die zugehörige Charakteristik:

$$\chi=\frac{\left| \varepsilon^{l_1}, \varepsilon^{l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n} \right|}{\left| 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1} \right|}. \tag{14}$$

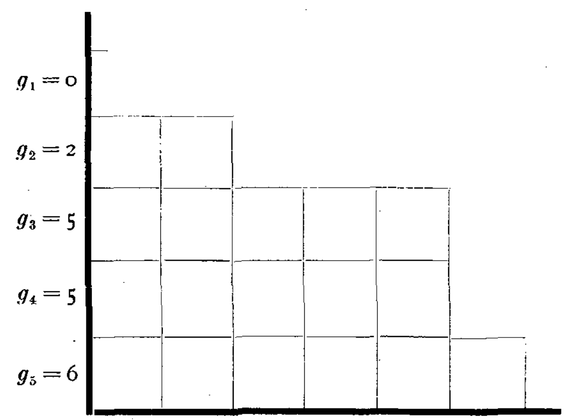
Darin liegt eine Art von Reziprozitätsgesetz:

Satz (über die Gruppe $\mathfrak{g}$). Die Anzahl der linear unabhängigen invarianten Grössen von gegebenem Typus $\mathfrak{h}$, welche von n Argumentvektoren bezw. in der Ordnung $r_1, r_2 \ldots, r_n$ abhängen, ist ebenso gross wie die Multiplizität des Gewichtes $r_1 \varphi_1 + r_2 \varphi_2 + \cdots + r_n \varphi_n$ in der Darstellung $\mathfrak{h}$.

Die für beliebige Anzahl e der Argumentvektoren gültige Formel (8) lehrt zunächst die selbstverständliche Tatsache, dass für jede invariante Grösse vom Typus $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ die Gesamtordnung $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_e$ der Grösse in den Argumenten gleich dem Gesamtgewicht $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$ des Typus sein muss. F ist nach ihr allgemein von analogem Bau wie die Charakteristik (14); man hat in ihr n durch e, die ε durch die z zu ersetzen und als g-Reihe die folgende zu nehmen:

$$0, 0, \ldots, 0, g_1, g_2, \ldots, g_n.$$

Nun kann man aber die Koeffizienten des Polynoms χ der ε ausdrücken durch die Charaktere der Vertauschungsgruppe $\mathfrak{P}_r$ von r Dingen. Ordnet man nämlich die r Ziffern von 1 bis r in ein Treppenschema (g) wie das nebenstehende ein, dessen Stufen bezw. die Länge $g_1, g_2, \ldots, g_n$ haben, so gehört dazu eine bestimmte primitive Darstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{P}_r$ und damit ein einfacher Charakter σ von ihr. Zu seiner Berechnung stehen zwei Methoden zur Verfügung, über die in I referiert wurde. Und die Formel in I, p. 306 für den dort mit $r_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ bezeichneten Koeffizienten liefert jetzt den



Satz. Die Anzahl der linear unabhängigen invarianten Grössen vom Typus $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, welche in den e Argumentvektoren von der Ordnung $r_1, r_2, \ldots, r_e$ sind, beträgt, falls σ den zum Treppenschema (g) gehörigen Charakter der Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_r$ bedeutet:

$$\frac{\Sigma \sigma(P)}{r_1! \, r_2! \ldots r_e!}.$$

Die Summe ist zu erstrecken über alle $r_1! \, r_2! \ldots r_e!$ Permutationen P, welche bei Zerlegung der Ziffernreihe in successive Abschnitte von der Länge $r_1, r_2, \ldots, r_e$ die Ziffern jedes Abschnitts nur untereinander vertauschen.

Gruppe c.

$$\nabla(z) \text{ ist} = \prod_{i<k} \frac{(z_k - z_i)(1 - z_i z_k)}{z_i z_k},$$

daher

$$(\Pi z)^{e-1} \nabla(z) = \left| 1 + z^{2(e-1)}, \ldots, z^{e-2} + z^e, z^{e-1} \right| = D(z) \cdot \prod_{i<k} (1 - z_i z_k).$$

Daraus geht hervor, dass $F(z)$ hier die Gestalt hat:

$$\frac{\text{ganze rationale Fkt.}}{\prod_{i<k}(1 - z_i z_k)}. \tag{15}$$

Was das zu bedeuten hat, machen wir uns zunächst an den skalaren Invarianten klar. Die in der Formel (10) als Zähler auftretende Determinante lässt sich, wenn alle $g_i = 0$ sind, dadurch vereinfachen, dass man von der $(n+2)^{\text{ten}}$, $(n+3)^{\text{ten}}, \ldots, (2n+1)^{\text{ten}}$ Kolonne bezw. die $n^{\text{te}}, (n-1)^{\text{te}}, \ldots 1^{\text{te}}$ subtrahiert. Sie lautet dann:

$$\left| 1 + z^{2(e-1)-\nu}, \ldots, z^{e-\nu-2} + z^e \,\vdots\, z^{e-\nu-1}, z^{e-\nu}, \ldots, z^{e-1} \right|.$$

Solange $e \leqq \nu + 1$ ist, gilt insbesondere

$$F(z) = \frac{D(z)}{\nabla(z)} = \prod_{i<k} \frac{1}{1 - z_i z_k}. \tag{16}$$

Skalare Invarianten sind die schiefen Produkte je zweier der Argumentvektoren

$$\pi_{ik} = \left[\overset{i}{x}\,\overset{k}{x}\right] \qquad (i < k).$$

Die Gleichung (16) bedeutet, dass soviele unabhängige Invarianten vorhanden sind als Monome der π_{ik}, die in den Argumentvektoren von der gewünschten Ordnung sind. Stützt man sich auf den »ersten Fundamentalsatz», der aussagt, dass alle Invarianten Aggregate der π_{ik} sind (siehe Weyl, Math. Zeitschr. *20*, p. 140 ff.), so schliesst man daraus, dass diese voneinander algebraisch unabhängig sind, solange die Anzahl der Argumentvektoren $\nu + 1$ nicht übersteigt. Stützt man sich umgekehrt auf die leicht einzusehende Tatsache, dass die π_{ik} unter dieser Voraussetzung algebraisch unabhängig sind — man kann nämlich den π_{ik} beliebige Werte verleihen; diese Behauptung ist im wesentlichen damit gleichbedeutend, dass man jede nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform in die Normalform (1) überführen kann —, so liefert jene Formel den Fundamentalsatz für $e \leqq \nu + 1$. (Es genügt, ihn für $e = \nu$ zu besitzen, um ihn daraus mit Hülfe der einfachen CAPELLIschen Identität allgemein zu gewinnen.)

Auf Grund des Gesagten wird man nun wohl den Umstand, dass $F(z)$ allgemein die Gestalt (15) besitzt, dahin verstehen müssen, dass bei gegebenem Typus $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ und gegebener Argumentzahl e nur bis zu einer gewissen Gesamtordnung r hin wirklich neue invariante Grössen vom Typus (g) auftreten, von da ab jedoch nur solche, die aus Grössen niedrigerer Ordnung durch Vorsetzen von Faktoren $[xy]$ entstehen. Dies ist nun wirklich richtig, und zwar existiert, wie $[xy]$ die einzige elementare Invariante ist, *bei vorgegebenem Typus* $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ *unabhängig von der Anzahl* e *der Argumentvektoren nur eine endliche Zahl invarianter Elementargrössen dieses Typus', die höchstens* $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_n$ *Argumente* $x, y, \ldots$ *linear enthalten.* Das heisst: man erhält alle invarianten Grössen des Typus, die von irgend einer Anzahl willkürlicher Vektoren $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots$ abhängen, durch folgende Operationen: man setzt für die Argumente $x, y, \ldots$ in den Elementargrössen irgendwelche der Vektoren $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots$ ein, multipliziert mit invarianten Faktoren von der Gestalt $[xy]$ und addiert mehrere Grössen gleicher Ordnung, die man so gewann.

Der Beweis beruht auf dem Fundamentalsatz und der Tatsache, dass die primitive Darstellung $\mathfrak{h}$ vom höchsten Gewicht $g_1\varphi_1 + g_2\varphi_2 + \cdots + g_n\varphi_n$ gemäss ihrer in II, p. 335 skizzierten Konstruktion in der Darstellung $\mathfrak{c}^g$ enthalten ist und darum nach dem Satz von der vollen Reduzibilität $\mathfrak{c}^g$ in $\mathfrak{h}$ und einen weiteren Bestandteil zerfällt. Die n^g Variablen der Darstellung $\mathfrak{c}^g$: $\tau \to T$ sind die Koeffizienten einer willkürlichen Linearform von g kontravarianten Vektoren $\xi, \eta, \ldots$:

$$(17) \qquad \sum_{i, k, \ldots} f_{ik\ldots}\, \xi_i \eta_k \cdots.$$

Dass sich aus ihr die μ-dimensionale Darstellung $\mathfrak{h}$: $\tau \to t$ rein abspalten lässt, besagt offenbar:

1) man kann μ unabhängige Linearkombinationen der $f_{ik\ldots}$ bilden:

$$(18) \qquad \iota_1, \ldots, \iota_\mu = \text{Linearkomb.}\ (f_{ik\ldots}),$$

die sich untereinander nach t transformieren, wenn die $f_{ik\ldots}$ der Transformation T unterworfen werden.

2) Man kann umgekehrt die $f_{ik\ldots}$ so als Linearkombinationen von μ unabhängigen Variablen $\iota_1, \ldots, \iota_\mu$ ansetzen:

$$f_{ik\dots} = \text{Linearkomb. } (\iota_1, \dots, \iota_\mu), \tag{19}$$

dass bei Ausübung der Transformation t auf die ι die $f_{ik\dots}$ die Transformation T erleiden.

3) Setzt man in (18) rechts für $f_{ik\dots}$ die durch (19) eingeführten Ausdrücke ein, so entstehen identisch die linken Seiten $\iota_1, \dots, \iota_\mu$.

Nimmt man nun eine beliebige Invariante

$$I = \sum f_{ik\dots}(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \dots)\, \xi_i \eta_k \dots$$

her, die ausser von den Argumentvektoren $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \dots$ in den Ordnungen $r_1, r_2, \dots$ noch von g kontravarianten Vektoren $\xi, \eta, \dots$ linear abhängt, so erhält man nach den Gleichungen (18) aus ihr eine invariante Grösse $\iota = (\iota_1, \dots, \iota_\mu)$ des gewünschten Typus und der gewünschten Ordnung in den verschiedenen Argumenten $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \dots$. Ist umgekehrt $(\iota_1, \dots, \iota_\mu)$ eine beliebige Grösse dieser Art, so gewinnt man dazu mittels der Gleichungen (19) eine Form (17), welche gegenüber der Gruppe $\mathfrak{c}$ invariant ist und aus der durch den Prozess (18), wie die Aussage 3) lehrt, ι wiedergewonnen wird. Unser Erzeugungsprozess liefert infolgedessen *alle* invarianten Grössen der gewünschten Art. — Da nun alle skalaren Invarianten, die ausser kogredienten $x, y, \dots$ auch kontragrediente Vektoren $\xi, \eta, \dots$ enthalten, nach dem Fundamentalsatz sich aus Elementarinvarianten von der Gestalt

$$[x\,y], \qquad (x\,\xi) = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \cdots + x_\nu \xi_\nu, \qquad [\xi\,\eta]$$

zusammensetzen, genügt es den geschilderten Prozess auf Invarianten I anzuwenden, die ein Produkt solcher Elementarinvarianten sind; und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Genau der gleiche Satz gilt offenbar für die Gruppe $\mathfrak{g}$.

Gruppe $\mathfrak{d}$. Und mit einer geringen Modifikation auch für die Gruppe $\mathfrak{d}$. Der »erste Fundamentalsatz» besagt hier, dass jede Invariante sich aus Determinanten von ν Vektoren $|x, y, \dots|$ und skalaren Produkten $(x\,y)$ zusammensetzt. In jedem Gliede des Aggregats braucht man nur *eine* Determinante auftreten zu lassen, weil das Produkt zweier Determinanten sich durch die skalaren Produkte ausdrückt. Es können ohne weiteres auch kontravariante Vektoren ξ zugelassen werden, da mit ξ ein kovarianter $x = \xi'$ durch die Gleichungen

$$\{x_0 = \xi_0\}, \; x_1 = \xi'_1, \; x'_1 = \xi_1, \dots, \; x_n = \xi'_n, \; x'_n = \xi_n$$

verbunden ist. In einem Aggregatglied mag daher neben Faktoren

$$(x\,\xi), \qquad (x\,y), \qquad (\xi\,\eta)$$

auch *ein* Faktor von der folgenden Art vorkommen:

$$|\xi', u, v, \ldots| \quad \text{oder} \quad |\xi', \eta', v, \ldots| \qquad \text{u. s. w.}$$

Infolgedessen muss man damit rechnen, dass die invarianten Elementargrössen eines gegebenen Typus $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ bis zu $g + \nu - 2$ (statt g, wie es oben hiess) Argumentvektoren $x, y, \ldots$ linear enthalten können.

Im übrigen sind ähnliche Bemerkungen wie gelegentlich der Gruppe $\mathfrak{c}$ zu machen. Der Nenner in den Formeln (12), (13) für F lautet

$$D(z) \cdot \prod_{i \leqq k} (1 - z_i z_k),$$

dem Umstande entsprechend, dass jetzt neben den skalaren Produkten $\left(\overset{i}{x}\,\overset{k}{x}\right)$ zweier verschiedener Argumente auch die skalaren Produkte $(\overset{i}{x}\,\overset{i}{x})$ der Argumente mit sich selber zu berücksichtigen sind. — Für die *Skalarinvarianten* (alle $g_i = 0$) lässt sich der Zähler verwandeln in:

$$\left| 1 \pm z^{2e-\nu}, \ldots, z^{e-\nu} \pm z^{\nu} \,\vdots\, z^{e-\nu+1}, \ldots, z^{e-1} \right|.$$

Das obere Vorzeichen entspricht ungerader, das untere gerader Dimensionszahl ν. Ist die Anzahl e der Argumente $\leqq \nu - 1$, so erhält man also

$$F = \prod_{i \leqq k} \frac{1}{1 - z_i z_k}, \tag{20}$$

während für $e = \nu$ kommt:

$$F = (1 + z_1 z_2 \cdots z_\nu) \prod_{i \leqq k} \frac{1}{1 - z_i z_k}. \tag{21}$$

Das ist natürlich mit dem Fundamentalsatz im besten Einklang. Der Faktor $1 + z_1 z_2 \ldots z_\nu$ in der letzten Formel bedeutet, dass bei ν Argumenten zu den »geraden« Invarianten, die sich aus den algebraisch unabhängigen skalaren Produkten $\left(\overset{i}{x}\,\overset{k}{x}\right)$ der Argumente aufbauen, die »ungeraden« durch Multiplikation mit der Determinante $\left|\overset{1}{x}\,\overset{2}{x} \ldots \overset{\nu}{x}\right|$ hinzukommen. — Mit Hülfe dieser im wesentlichen aus dem Fundamentalsatz abgelesenen Formel hat Herr Schur in umgekehrter Wegrichtung den Ausdruck des Volumens $d\Omega$ hergeleitet.[1]

[1] Schur *3*, p. 350.

Ich mache zum Schluss noch auf einen merkwürdigen Umstand aufmerksam, welcher der Ausdeutung und Aufklärung bedürftig ist: für n Argumentvektoren ($e=n$) und alle möglichen Typen ($g_1, g_2, \ldots, g_n$) stehen die zu den Gruppen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gehörigen Funktionen F in dem einfachen Zusammenhang:

$$F_{\mathfrak{c}} = \Pi_{i<k} \frac{1}{1 - z_i z_k} \cdot F_{\mathfrak{g}}, \qquad F_{\mathfrak{d}} = \Pi_{i \leqq k} \frac{1}{1 - z_i z_k} \cdot F_{\mathfrak{g}}.$$

§ 4. Reduktion der Darstellung bei Reduktion der Dimensionszahl.

Gruppe $\mathfrak{g}$. Wir betrachten die primitive Darstellung $\mathfrak{h}$ mit dem höchsten Gewicht (3). Beschränken wir uns auf diejenigen Transformationen τ des zugrunde liegenden ν-dimensionalen Raumes, welche die ersten $\nu-1$ Koordinaten untereinander transformieren und die letzte ungeändert lassen, so haben wir darin zugleich eine Darstellung $\mathfrak{h}_{\nu-1}$ der Gruppe $\mathfrak{g}$ in $\nu-1$ Dimensionen. Wir sagen, sie »liege» in der Darstellung $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}_\nu$. In was für irreduzible Bestandteile zerfällt sie? Ich behaupte:

Satz. Die Darstellung der Gruppe $\mathfrak{g}_{\nu-1}$ *in* $\nu-1$ *Dimensionen, die in der primitiven Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{g}_\nu$ *vom Typus* $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ *liegt, enthält diejenigen primitiven Darstellungen von* $\mathfrak{g}_{\nu-1}$, *deren Typus* $(g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n-1})$ *den Ungleichungen*

$$g_1 \leqq g'_1 \leqq g_2 \leqq \ldots \leqq g_{n-1} \leqq g'_{n-1} \leqq g_n \tag{22}$$

genügt, einmal und keine anderen.

Der Beweis ist sehr einfach. Die Charakteristik von $\mathfrak{h}_{\nu-1}$ entsteht aus der Charakteristik (14) von $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_\nu$, wenn man $\varepsilon_n = 1$ setzt. Der Nenner

$$D_n(\varepsilon) = \Pi(\varepsilon_i - \varepsilon_k) \qquad (i>k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

geht dadurch über in

$$D_{n-1}(\varepsilon) \cdot (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_{n-1}).$$

Um den zweiten Faktor aus dem Zähler herauszudividieren, subtrahieren wir in der Zählerdeterminante von jeder Spalte (ausser von der letzten) die nächstfolgende. Weil dadurch die letzte Zeile sich in (0, 0, ..., 0, 1) verwandelt und z. B.

$$\frac{\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{l_2}}{1-\varepsilon} = \varepsilon^{l_1} + \varepsilon^{l_1+1} + \cdots + \varepsilon^{l_2-1}$$

ist, hat sie nach vollzogener Division sich in die $(n-1)$ gliedrige Determinante

$$|\varepsilon^{l_1}+\varepsilon^{l_1+1}+\cdots+\varepsilon^{l_2-1}, \ldots, \varepsilon^{l_{n-1}}+\cdots+\varepsilon^{l_n-1}|$$

umgewandelt. Diese aber ist die Summe aller Determinanten von der Form

$$|\varepsilon^{l'_1}, \varepsilon^{l'_2}, \ldots, \varepsilon^{l'_{n-1}}|,$$

deren Exponenten l' den Ungleichungen genügen

$$l_1 \leqq l'_1 < l_2 \leqq l'_2 < \cdots < l_{n-1} \leqq l'_{n-1} < l_n.$$

Und an der summatorischen Zerlegung der Charakteristik in primitive erkennt man den Zerfall der Darstellung in irreduzible Bestandteile.

Das Resultat enthält, wenn es absteigend bis zur Dimensionszahl 0 verwendet wird, eine rekursive Bestimmung der Dimensionszahlen der primitiven Darstellungen von $\mathfrak{g}_\nu$, für die freilich auch eine geschlossene Formel existiert (I, p. 300, Satz 6).

Gruppe $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{d}$. Bei ihnen führt genau die gleiche Methode zum Ziel.

$\mathfrak{d}$, $\nu = 2n+1$. Anstelle von (22) treten die Ungleichungen

$$|g'_1| \leqq g_1 \leqq g'_2 \leqq \cdots \leqq g_{n-1} \leqq g'_n \leqq g_n.$$

Die in der primitiven Darstellung des Typus (g) von $\mathfrak{d}_\nu$ liegende Darstellung von $\mathfrak{d}_{\nu-1}$ enthält alle primitiven Typen (g') einmal, welche diesen Ungleichungen genügen, und keine anderen.

$\mathfrak{d}$, $\nu = 2n$. Hier lauten die entsprechenden Ungleichungen

$$|g_1| \leqq g'_1 \leqq g_2 \leqq \cdots \leqq g_{n-1} \leqq g'_{n-1} \leqq g_n.$$

Die Ergebnisse sind übrigens weder bei $\mathfrak{g}$ noch bei $\mathfrak{d}$ beschränkt auf die eindeutigen Darstellungen. Nur muss zur vollständigen Formulierung hinzugefügt werden, dass, wie die g (und die g') untereinander sich lediglich um ganze Zahlen unterscheiden, so auch die g'-Reihe von der g-Reihe um ganze Zahlen differieren soll.

Gruppe $\mathfrak{c}$. Ihre Dimensionszahl $\nu = 2n$ kann nur um 2 springen. Da aber die Charakteristikenformel für $\mathfrak{c}_{2n}$ im wesentlichen identisch ist mit derjenigen für $\mathfrak{d}_{2n+1}$, lässt sich das Resultat aus dem zwiefachen Abstieg $\mathfrak{d}_{2n+1} \to \mathfrak{d}_{2n} \to \mathfrak{d}_{2n-1}$ ablesen. Man schreibe also jedes Zahlensystem $g'_1, g'_2, \ldots, g'_n$ einmal auf, das den Ungleichungen genügt

$$0 \leqq g' \leqq g_1 \leqq g'_2 \leqq \cdots \leqq g_{n-1} \leqq g'_n \leqq g_n$$

und entwickle aus jedem von ihnen diejenigen Zahlsysteme $g''_1, g''_2, \ldots, g''_{n-1}$, für welche

$$g'_1 \leqq g''_1 \leqq g'_2 \leqq \cdots \leqq g'_{n-1} \leqq g''_{n-1} \leqq g'_n$$

gilt. Die in der primitiven Darstellung der Gruppe $\mathfrak{c}_\nu$ ($\nu = 2n$) vom Typus (g) liegende Darstellung von $\mathfrak{c}_{\nu-2}$ enthält alle und nur die primitiven Darstellungen, deren Typus eines der Zahlsysteme (g'') ist, und jede in derjenigen Vielfachheit, wie sie das beschriebene Verfahren liefert. Explizite: der Typus (g'') tritt so oft auf, wie die folgende Formel angibt, vorausgesetzt dass alle darin auftretenden Faktoren positiv sind; sonst aber überhaupt nicht.

$$[1+\min(g_1, g''_1)]\ [1+\min(g_2, g''_2)-\max(g_1, g''_1)]\cdots[1+g_n-\max(g_{n-1}, g''_{n-1})].$$

§ 5. Die Darstellungen der zweischichtigen orthogonalen Gruppe $\mathfrak{d}'$.

Neben der Gruppe $\mathfrak{d}$ aller $(x\,x)$ invariant lassenden homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1, welche ein einziges zusamenhängendes Kontinuum ausmacht, betrachtet Hr. Schur[1] die Gruppe $\mathfrak{d}'$, in die ausser den eigentlichen auch die uneigentlichen Operationen von der Determinante -1 aufgenommen werden. Zur Vervollständigung meiner früheren Untersuchungen möge dieser Fall hier auch auf dem von mir gewählten Wege erledigt werden. *Bei ungerader Dimensionszahl* $\nu = 2n+1$ sind die Verhältnisse sofort zu übersehen, weil die »Nebengruppe» zu $\mathfrak{d}$ innerhalb $\mathfrak{d}'$ dadurch erhalten wird, dass alle Matrizen τ von $\mathfrak{d}$ in $-\tau$ verwandelt werden. Jeder primitiven Darstellung $\tau \to t$ von $\mathfrak{d}$ entsprechen zwei primitive, zueinander »assoziierte» Darstellungen von $\mathfrak{d}'$; nämlich

1. $\tau \to t, \quad -\tau \to t;$

2. $\tau \to t, \quad -\tau \to -t.$

Damit sind die primitiven Darstellungen erschöpft. Denn der Spiegelung am Nullpunkt, der ν-dimensionalen negativen Einheitsmatrix $-\delta$ muss, da sie zu $\mathfrak{d}'$ gehört und mit allen Operationen von $\mathfrak{d}'$ vertauschbar ist, in einer primitiven Darstellung von $\mathfrak{d}'$ ein Multiplum α der Einheitsmatrix korrespondieren. Wegen $(-\delta)^2 = \delta$ muss $\alpha^2 = 1$ sein; es gibt also nur die beiden Möglichkeiten, dass $-\delta$ durch die Einheitsmatrix oder durch die negative Einheitsmatrix dargestellt wird.

Viel verwickelter ist *die gerade Dimensionszahl* $\nu = 2n$. Eine Charakteristik von $\mathfrak{d}'$ muss invariant sein gegenüber dem Vorzeichenwechsel jedes einzelnen Drehwinkels φ. Denn innerhalb $\mathfrak{d}'$ ist mit der Hauptmatrix (ε) auch diejenige konjugiert, die aus ihr durch Vertauschung von ε_1 mit ε_1^{-1} entsteht. Darum müssen die Koeffizienten des höchsten Gewichts den Ungleichungen

[1] Schur *2* und *3*.

$$(23) \qquad 0 \leqq g_1 \leqq g_2 \leqq \ldots \leqq g_n$$

genügen, und muss $\Delta \cdot \chi$ (innerhalb der Hauptgruppe $\mathfrak{d}$) additiv zusammengesetzt sein aus den Elementarsummen

$$\xi^{\bullet}(0, l_2, \ldots, l_n) = \xi(0, l_2, \ldots, l_n) = |\, 1, c(l_2\varphi), \ldots, c(l_n\varphi) \,|;$$

$$\xi^{\bullet}(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \xi(-l_1, l_2, \ldots, l_n)$$
$$= |\, c(l_1\varphi), c(l_2\varphi), \ldots, c(l_n\varphi) \,| \qquad (l_1 > 0).$$

Da im zweiten Fall für $\frac{\xi^{\bullet}(l)}{\Delta} = \chi^{\bullet}$ bei Integration über $\mathfrak{d}$ die Gleichung besteht

$$\int_{\mathfrak{d}} \chi^{\bullet}(\tau)\, \bar{\chi}^{\bullet}(\tau)\, |d\tau| = 2 \int_{\mathfrak{d}} |d\tau| = \int_{\mathfrak{d}'} |d\tau|,$$

der Mittelwert von $|\chi|^2$ für eine primitive Charakteristik χ aber $= 1$ sein muss, kann die primitive Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{d}'$ vom höchsten Gewicht $g_1\varphi_1 + g_2\varphi_2 + \cdots + g_n\varphi_n$, $g_1 > 0$ nur so lauten:

$$(24) \quad \begin{cases} \chi(\tau) = \dfrac{|\, \varepsilon^{l_1} + \varepsilon^{-l_1}, \varepsilon^{l_2} + \varepsilon^{-l_2}, \ldots, \varepsilon^{l_n} + \varepsilon^{-l_n} \,|}{|\, 1, \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \ldots, \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{-(n-1)} \,|}, \qquad l_i = g_i + (i-1), \\ \qquad \text{für die eigentlichen Operationen } \tau, \\ \chi(\tau) = 0 \text{ für die uneigentlichen Operationen.} \end{cases}$$

Ihre Dimensionszahl ist doppelt so gross wie die korrespondierende von $\mathfrak{d}$, und sie zerfällt für die Operationen von $\mathfrak{d}$ in die beiden »adjungierten» irreduziblen Darstellungen vom Typus $(\pm g_1, g_2, \ldots, g_n)$. Dass die Gewichtskoeffizienten g_i unter Einhaltung der Ungleichungen (23) und $g_1 > 0$ willkürlich vorgegeben werden können, ergibt sich für ganzzahlige g mittels der alten Konstruktion; für halbganze g käme es nur darauf an, die primitive Darstellung des Typus $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$ von $\mathfrak{d}'$ anzugeben. Dies gelingt algebraisch, wenn man die entsprechende Darstellung von $\mathfrak{d}$ an den Operationen von $\mathfrak{d}$ selber, nicht an den infinitesimalen Erzeugenden schildert; durch die transzendente Methode (III, p. 390) ist die Existenz auf jeden Fall gesichert.

Ist $g_1 = 0$, so muss man auf die Nebengruppe eingehen. Als Normalform ihrer Operationen, auf die sich jede durch geeignete Wahl eines »orthogonalen» Koordinatensystems bringen lässt, kann man benutzen

$$
(\varepsilon)' = \begin{pmatrix}
\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & & \\
& \begin{matrix} \varepsilon_2' & 0 \\ 0 & \varepsilon_2'^{-1} \end{matrix} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \begin{matrix} \varepsilon_n' & 0 \\ 0 & \varepsilon_n'^{-1} \end{matrix}
\end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i' = e(\varphi_i').
$$

Indem man die Transformation

$$\delta u \to \delta u - (\varepsilon)' \, \delta u \, (\varepsilon)'^{-1}$$

im Gebiet der infinitesimalen Drehungen δu studiert, bekommt man als Ausdruck desjenigen Volumenteils der Nebengruppe, auf welchem die »Drehwinkel» φ_i' dem Spielraum $\varphi_i' \ldots \varphi_i' + d\varphi_i'$ angehören:

$$d\Omega' = \Delta' \bar{\Delta}' \, d\varphi_2' \ldots d\varphi_n' \text{ mit}$$

$$\Delta' = \Pi \, s(\varphi_i') \cdot \Pi(c(\varphi_i') - c(\varphi_k')) \qquad (i < k;\ i, k = 2, 3, \ldots, n).$$

Da $(\varepsilon)'$ durch Verwandlung eines φ' in $-\varphi'$ in eine innerhalb $\mathfrak{d}'$ zu $(\varepsilon)'$ konjugierte Operation übergeht, ebenso, wenn man $\varphi_2', \varphi_3', \ldots, \varphi_n'$ untereinander vertauscht, muss der mit Δ' multiplizierte primitive Charakter χ innerhalb der Nebengruppe sich aus Ausdrücken von der Form zusammensetzen

$$\xi'(l) = |s(l_i \varphi_k')|_{i, k = 2, 3, \ldots, n}.$$

Danach ist zu erwarten, dass es zwei und nur zwei zueinander assoziierte primitive Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{d}'$ vom Typus $(g_1 = 0, g_2, \ldots, g_n)$ gibt und ihre Charakteristiken so aussehen:

$$
(25) \left\{
\begin{aligned}
&\chi = \frac{|1,\ c(l_2 \varphi), \ldots,\ c(l_n \varphi)|}{|1,\ c(\varphi), \ldots,\ c((n-1)\varphi)|} && \text{für die Operationen von } \mathfrak{d}, \\
&\chi = \pm \frac{|s(l_2 \varphi'), \ldots,\ s(l_n \varphi')|}{\prod\limits_{i=2}^{n} s(\varphi_i') \cdot |1,\ c(\varphi'), \ldots,\ c((n-2)\varphi')|} && \text{für die Operationen der Nebengruppe.}
\end{aligned}
\right.
$$

Die Determinanten sind so zu lesen, dass anstelle von φ der Reihe nach $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$, anstelle von φ' aber nur $\varphi'_2, \dots, \varphi'_n$ gesetzt werden. Die Dimensionszahl ist die gleiche wie für die Gruppe $\mathfrak{d}$. Doch bedarf unsere Behauptung noch der näheren Begründung.

Eine primitive Darstellung von $\mathfrak{d}'$ des gewünschten Typus erhält man nach II, indem man die kleinste lineare Mannigfaltigkeit bildet, welche alle durch die Transformationen von $\mathfrak{d}'$ aus dem Hypervektor

$$E_1 = e_n^{p_n}(e_n \times e_{n-1})^{p_{n-1}} \dots (e_n \times \dots \times e_2)^{p_2}$$

entstehenden Hypervektoren umspannt; $e_1, e_2, \dots, e_n$; $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ bedeuten dabei die Grundvektoren, das Koordinatensystem des Raumes $\mathfrak{r}$, p_i ist die ganze Zahl $g_i - g_{i-1} \geqq 0$. Das Koordinatensystem im Darstellungsraum kann aber so angenommen werden: $E_1, E_2, \dots$, dass jeder der Hypervektoren E_i linear zusammengesetzt ist aus Produkten, welche p_n eindimensionale Grundvektoren, p_{n-1} zweidimensionale, ..., p_2 $(n-1)$ dimensionale als Faktoren enthalten, und welche alle das gleiche Gewicht besitzen. Nur E_1 hat darunter das höchste Gewicht $g_2\varphi_2 + \dots + g_n\varphi_n$. Bei Ausübung der Substitution $(\varepsilon)'$ gilt daher

$$E'_1 \rightarrow e(g_2\varphi'_2 + \dots + g_n\varphi'_n) \,.\, E_1,$$

und die übrigen Koeffizienten der $(\varepsilon)'$ in der Darstellung korrespondierenden Matrix $(E)'$ enthalten nur Glieder von niedrigerem Gewicht als das hingeschriebene. Somit beginnt die Charakteristik unserer irreduziblen Darstellung für die Elemente der Gruppe $\mathfrak{d}$ mit dem höchsten Glied $e(g_2\varphi_2 + \dots + g_n\varphi_n)$ und für die Elemente der Nebengruppe mit dem höchsten Glied $e(g_2\varphi'_2 + \dots + g_n\varphi'_n)$. Es gilt also

$$\varDelta \cdot \chi = \xi(l) + c_* \xi(l_*) + \cdots \qquad \text{in der Hauptgruppe,}$$

$$\varDelta' \cdot \chi = \xi'(l) + c'_* \xi'(l'_*) + \cdots \qquad \text{in der Nebengruppe.}$$

$c_*, \dots, c'_*, \dots$ sind konstante Koeffizienten, die mit ihnen behafteten Zusatzterme stehen niedriger als der den Koeffizienten 1 tragende Hauptterm. Die Forderung aber, dass der Mittelwert von $|\chi|^2$ gleich 1 sein muss, liefert die Beziehung

$$(1 + |c_*|^2 + \cdots) + (1 + |c'_*|^2 + \cdots) = 2,$$

aus welcher das Verschwinden der Zusatzglieder hervorgeht. Damit ist sichergestellt, dass die beiden assoziierten Darstellungen $\mathfrak{D}_+$, $\mathfrak{D}_-$ mit den Charakteristiken (25), $\chi = \chi_+$ und χ_- wirklich existieren.

Es kann aber auch keine andere geben von demselben höchsten Gewicht. Denn für eine solche $\mathfrak{D}$ würde die Charakteristik ζ innerhalb der Hauptgruppe die Gestalt besitzen

$$\Delta \cdot \zeta = c \cdot \xi(l) + c_* \cdot \xi(l_*) + \cdots,$$

wo $c \neq 0$, $c_*, \ldots$ *ganze Zahlen* sind. Da $\int_{\mathfrak{b}'} |\zeta|^2 |d\tau|$ gleich dem doppelten Volumen von $\mathfrak{b}$ sein muss, gibt es nur die Möglichkeiten: 1) $\Delta \cdot \zeta = \xi(l)$ in der Hauptgruppe; 2) $\Delta \cdot \zeta = \xi(l) \pm \xi(l_*)$ in der Hauptgruppe, $\zeta = 0$ in der Nebengruppe. Im Falle 2) muss die erste Komponente des Zahlensystems l_* gleich 0 sein, da sonst die Symmetrieeigenschaften von ζ verletzt wären. Dann aber genügt ζ nicht der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{\mathfrak{b}'} \bar{\zeta} \chi_* |d\tau| = 0$$

gegenüber der durch die Formeln (25) für $l = l_*$ gelieferten Charakteristik χ_*. Bleibt also nur die erste Möglichkeit, dass die Charakteristik ζ von $\mathfrak{D}$ innerhalb der Hauptgruppe mit der Charakteristik χ von $\mathfrak{D}_+$ und $\mathfrak{D}_-$ übereinstimmt. Wäre nun $\mathfrak{D}$ weder mit $\mathfrak{D}_+$ noch mit $\mathfrak{D}_-$ äquivalent, so bestünden die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{\mathfrak{b}'} \bar{\zeta} \chi_+ |d\tau| = 0, \qquad \int_{\mathfrak{b}'} \bar{\zeta} \chi_- |d\tau| = 0,$$

deren Addition zu der unmöglichen Gleichung

$$2 \int_{\mathfrak{b}} \bar{\zeta} \chi |d\tau| = 2 \int_{\mathfrak{b}} \bar{\chi} \chi |d\tau| = 0$$

führt.[1]

[1] Vergl. Schur *2*, pp. 301/302.