Numer. Math. 25, 291–295 (1976)

Zur Konvergenz des symmetrischen Relaxationsverfahrens

G. Alefeld und R. S. Varga*

Received May 9, 1975

On the Convergence of the Symmetric SOR Method

Summary. For the iterative solution of the matrix equation $Ax=b$ by means of the (point) symmetric SOR method (called the SSOR method), the basic convergence analysis of this iterative process has been developed in the literature only for the case when A is Hermitian and positive definite. With the help of the theory of regular splittings, a more general convergence analysis of this iterative method is obtained, under the weaker assumption that A is a nonsingular H-matrix.

1.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$Ax=b$$

mit einer nichtsingulären (komplexen) Matrix A und einem (komplexen) Vektor b. Die Matrix A sei zerlegt in

$$A=D-L-U.$$

Dabei bezeichnet D eine Diagonalmatrix, L eine strenge untere und U eine strenge obere Dreiecksmatrix. Zur Auflösung des linearen Systems $Ax=b$ betrachten wir das folgende Verfahren

$$\begin{cases} x_{k+\frac{1}{2}}=(D-\omega L)^{-1}\{(1-\omega)\, D+\omega U\}\, x_k+\omega (D-\omega L)^{-1}\, b \\ x_{k+1}=(D-\omega U)^{-1}\{(1-\omega)\, D+\omega L\}\, x_{k+\frac{1}{2}}+\omega (D-\omega U)^{-1}\, b \end{cases}$$
$$(\omega>0),\ k=0,1,2,\ldots.$$

Setzen wir abkürzend

$$S_\omega=S_\omega(A)=(D-\omega U)^{-1}\{(1-\omega)\, D+\omega L\}(D-\omega L)^{-1}\{(1-\omega)\, D+\omega U\},$$

$$c=\omega(2-\omega)(D-\omega U)^{-1}D(D-\omega L)^{-1}\, b,$$

so läßt sich dieses Verfahren in der üblichen Form

$$x_{k+1}=S_\omega\, x_k+c, \qquad k=0,1,2,\ldots,$$

schreiben. Dieses Verfahren ist in der Literatur als symmetrisches SOR-Verfahren (SSOR-Verfahren), für $\omega=1$ als symmetrisches Gauss-Seidel (oder symmetrisches Einzelschrittverfahren), bekannt (s. etwa [3] und [4]). Es ist neuer-

* Research supported in part by the Energy Research and Development Administration (ERDA) under Grant E(11-1)-2075, and by the U.S. Air Force under Grant AFOSR 74-2729.

dings häufiger als Ausgangsverfahren für die Durchführung eines semi-iterativen Verfahrens betrachtet worden (s. etwa [4]—[6]). Das SSOR-Verfahren konvergiert genau dann für jeden Anfangsvektor gegen die Lösung des gegebenen Systems, wenn der Spektralradius von S_ω kleiner als eins ist. Die bekannten Aussagen dafür, daß dies der Fall ist, beschäftigen sich mit dem Fall, daß A hermitisch und positiv definit ist (s. etwa Young [4], Kap. 15, und die dort angegebene Literatur).

Unter Verwendung des von R. S. Varga in [3], Seite 87 eingeführten Begriffs der regulären Zerlegung einer Matrix beweisen wir in dieser Note einen allgemeinen Satz über die Konvergenz des SSOR-Verfahrens, mit dem sich dann mehrere einfache Kriterien angeben lassen. Die verwendete Beweisidee wurde bereits von U. Kulisch in [1] beim Beweis entsprechender Aussagen für das (gewöhnliche) SOR-Verfahren verwendet.

2.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathbb{C}^{n,n}$ die Menge aller $n\times n$-Matrizen $A=[a_{ij}]$ mit komplexen Elementen. Entsprechend ist $\mathbb{R}^{n,n}$ definiert. $\mathbb{C}^{n,n}_\pi$ bezeichnet die Menge aller $n\times n$-Matrizen mit komplexen Elementen, bei denen alle Diagonalelemente von Null verschieden sind.

Für eine beliebige Matrix $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n,n}$ ist die Vergleichsmatrix $\mathfrak{M}(A)=[\alpha_{ij}]\in\mathbb{R}^{n,n}$ definiert durch

$$\alpha_{ii}=|a_{ii}|,\qquad 1\leqq i\leqq n;$$
$$\alpha_{ij}=-|a_{ij}|,\qquad i\neq j,\ 1\leqq i,\ j\leqq n.$$

Weiter ist für eine beliebige Matrix $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n,n}$ die Menge der Äquimodularmatrizen definiert als

$$\Omega(A)=\{B=[b_{ij}]\in\mathbb{C}^{n,n}\colon |b_{ij}|=|a_{ij}|,\ 1\leqq i,\ j\leqq n\}.$$

A und $\mathfrak{M}(A)$ sind Elemente von $\Omega(A)$.

Für eine beliebige Matrix $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n,n}_\pi$, $n\geqq 2$, wird mit $D=\operatorname{diag}[a_{11},\ldots,a_{nn}]$ und der Einheitsmatrix I die Jacobimatrix $J(A)$ durch $A=D(I-J(A))$ definiert.

Mit $\varrho(A)$ wird der Spektralradius der Matrix A bezeichnet.

Schließlich kann jede Matrix $B=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{n,n}$ mit $b_{ij}\leqq 0$, $i\neq j$, $1\leqq i$, $j\leqq n$, in der Form

$$B=\tau I-C$$

mit $\tau=\max\limits_{1\leqq i\leqq n}\{b_{ii}\}$ und einer nichtnegativen Matrix $C=[c_{ij}]$ geschrieben werden, wobei die Elemente von C definiert sind durch

$$c_{ii}=\tau-b_{ii}\geqq 0,\qquad 1\leqq i\leqq n,$$
$$c_{ij}=-b_{ij}\geqq 0,\qquad i\neq j,\quad 1\leqq i,\quad j\leqq n.$$

Eine solche Matrix B heißt nach Ostrowski [2] *nichtsinguläre M-Matrix*, wenn $\tau>\varrho(C)$ gilt. Eine Matrix $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ heißt nach Ostrowski [2] *nichtsinguläre H-Matrix*, wenn $\mathfrak{M}(A)$ eine nichtsinguläre M-Matrix ist.

Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz. Es sei $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}_n^{n,n}$, $n\geqq 2$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

a) A ist eine nichtsinguläre H-Matrix;

b) Für alle $B\in\Omega(A)$ und alle ω aus dem Intervall $0<\omega<2/[1+\varrho(|J(A)|)]$ ist das SSOR-Verfahren konvergent.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b). Aufgrund der Theoreme 3.8 und 3.10 in [3] ist $\mathfrak{M}(A)$ genau dann eine nichtsinguläre M-Matrix, wenn

$$\varrho(J(\mathfrak{M}(A)))=\varrho(|J(B)|)<1$$

für alle $B\in\Omega(A)$ gilt. Sei nun $B\in\Omega(A)$ und

$$B=D(B)-L(B)-U(B)$$

die Zerlegung in eine Diagonalmatrix und strenge untere bzw. obere Dreiecksmatrizen. Die Abhängigkeit der Zerlegung von B wird im folgenden zur Vereinfachung der Schreibweise unterdrückt. Wir setzen weiter zur Abkürzung

$$\hat{L}=D^{-1}L,\qquad \hat{U}=D^{-1}U.$$

Damit läßt sich S_ω in der Form

$$S_\omega=(I-\omega\hat{U})^{-1}\{(1-\omega)\,I+\omega\,\hat{L}\}\,(I-\omega\hat{L})^{-1}\{(1-\omega)\,I+\omega\hat{U}\}$$

schreiben.

Wegen

$$\{(1-\omega)\,I+\omega\,\hat{L}\}\,(I-\omega\,\hat{L})^{-1}=(I-\omega\,\hat{L})^{-1}\{(1-\omega)\,I+\omega\hat{L}\}$$

gilt weiter

$$S_\omega=(I-\omega\hat{U})^{-1}(I-\omega\,\hat{L})^{-1}\{(1-\omega)\,I+\omega\,\hat{L}\}\,\{(1-\omega)\,I+\omega\hat{U}\}.$$

Außerdem gilt wegen

$$|(I-\omega\hat{U})^{-1}|\leqq(I-\omega|\hat{U}|)^{-1}$$

und

$$|(I-\omega\hat{L})^{-1}|\leqq(I-\omega|\hat{L}|)^{-1}$$

die Ungleichung

$$|S_\omega|\leqq\tilde{S}_\omega$$

mit

$$\tilde{S}_\omega=(I-\omega|\hat{U}|)^{-1}(I-\omega|\hat{L}|)^{-1}\{|1-\omega|\,I+\omega|\hat{L}|\}\{|1-\omega|\,I+\omega|\hat{U}|\}.$$

Wir betrachten nun die Matrix

$$\tilde{A}_\omega=\frac{1-|1-\omega|}{\omega}\,I-|J(B)|$$

und die Zerlegung

$$\tilde{A}_\omega=\tilde{M}_\omega-\tilde{N}_\omega$$

mit

$$\tilde{M}_\omega = \frac{1}{\omega(1+|1-\omega|)}(I-\omega|\hat{L}|)(I-\omega|\hat{U}|),$$

$$\tilde{N}_\omega = \frac{1}{\omega(1+|1-\omega|)}(|1-\omega|\,I+\omega|\hat{L}|)(|1-\omega|\,I+\omega|\hat{U}|).$$

Es gilt $\tilde{S}_\omega = \tilde{M}_\omega^{-1}\tilde{N}_\omega$. Offensichtlich ist $\tilde{M}^{-1} \geqq \mathfrak{O}$ und $\tilde{N}_\omega \geqq \mathfrak{O}$, so daß $\tilde{M}_\omega - \tilde{N}_\omega$ eine reguläre Zerlegung von $\tilde{A}_\omega$ ist (s. [3], S. 88, Definition 3.5). Wegen

$$\tilde{A}_\omega = \frac{1-|1-\omega|}{\omega}I - |J(B)| = \frac{1-|1-\omega|}{\omega}\left(I - \frac{\omega}{1-|1-\omega|}|J(B)|\right)$$

ist nach [3], Seite 83, Theorem 3.8,

$$\tilde{A}_\omega^{-1} \geqq \mathfrak{O} \quad \text{für } \frac{\omega}{1-|1-\omega|}\varrho(|J(B)|) < 1, \quad \text{d.h. für} \quad 0<\omega<\frac{2}{1+\varrho(|J(B)|)}.$$

Somit gilt für diese Werte von ω nach [3], Seite 89, Theorem 3.13 die Ungleichung $\varrho(\tilde{S}_\omega) < 1$. Nach [3], Seite 47, Theorem 2.8 gilt

$$\varrho(S_\omega) \leqq \varrho(|S_\omega|) \leqq \varrho(\tilde{S}_\omega).$$

Somit folgt die Behauptung $\varrho(S_\omega) < 1$ für Werte von ω aus dem angegebenen Intervall.

b) $\Rightarrow$ a): $\tilde{S}_\omega$ sei wie im ersten Teil des Beweises definiert. Es ist $\mathfrak{M}(A) \in \Omega(A)$ und wegen $\tilde{S}_\omega = S_\omega(\mathfrak{M}(A))$ für $0<\omega<1$ gilt nach Voraussetzung $\varrho(\tilde{S}_\omega) < 1$ für alle hinreichend kleinen $\omega > 0$.

Für $0<\omega\leqq 1$ gilt für die oben betrachtete Matrix $\tilde{A}_\omega$ die Beziehung $\tilde{A}_\omega = I - |J(A)|$. Wegen $\tilde{S}_\omega = \tilde{M}_\omega^{-1}\tilde{N}_\omega \geqq \mathfrak{O}$ und $\varrho(\tilde{S}_\omega) < 1$ für alle hinreichend kleinen $\omega > 0$ existiert nach Theorem 3.8 in [3] die Inverse $(I-\tilde{S}_\omega)^{-1}$, und es gilt

$$\mathcal{O} \leqq (I-\tilde{S}_\omega)^{-1} = (I-\tilde{M}_\omega^{-1}\tilde{N}_\omega)^{-1} = \tilde{A}_\omega^{-1}\tilde{M}_\omega.$$

Wegen $M_\omega^{-1} \geqq \mathcal{O}$ folgt daraus

$$\tilde{A}_\omega^{-1} = (I-|J(B)|)^{-1} = (I-J(\mathfrak{M}(A)))^{-1} \geqq \mathfrak{O}.$$

Wegen $J(\mathfrak{M}(A)) \geqq \mathfrak{O}$ folgt durch nochmalige Anwendung von Theorem 3.8 in [3] die Ungleichung $\varrho(J(\mathfrak{M}(A))) < 1$, d.h. $\mathfrak{M}(A)$ ist eine nichtsinguläre M-Matrix, oder was das gleiche ist, A ist eine H-Matrix.

Aus dem bewiesenen Satz lassen sich jetzt einige einfache Aussagen über das SSOR-Verfahren herleiten. Ohne Vollständigkeit anzustreben, geben wir zwei solche Aussagen an.

Korollar 1. *A sei eine streng diagonaldominante oder irreduzibel diagonaldominante komplexe Matrix (s. [3], S. 23). Dann konvergiert das SSOR-Verfahren für alle $B \in \Omega(A)$ und alle $0<\omega<2/[1+\varrho(|J(B)|)]$. Insbesondere konvergiert das symmetrische Einzelschrittverfahren.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem obigen Satz unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in diesem Falle für alle $B \in \Omega(A)$ gilt $\varrho(J(\mathfrak{M}(A))) = \varrho(|J(B)|) < 1$, daß also $\mathfrak{M}(A)$ eine nichtsinguläre M-Matrix ist (s. etwa [3], S. 74).

Korollar 2. A sei eine M-Matrix. Dann konvergiert das SSOR-Verfahren für alle $B \in \Omega(A)$ und alle $0 < \omega < 2/[1+\varrho(J(A))]$. Insbesondere konvergiert das symmetrische Einzelschrittverfahren.

Für eine M-Matrix A gilt $\mathfrak{M}(A) = A$. Damit folgt die Behauptung aus dem obigen Satz.

Literatur

1. Kulisch, U.: Über reguläre Zerlegungen von Matrizen und einige Anwendungen. Numer. Math. **11**, 444–449 (1968)
2. Ostrowski, A. M.: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. Comment. Math. Helv. **10**, 69–96 (1937)
3. Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Engelwood Cliffs, N.J.: Pentrice Hall, Series in Automatic Computation (1962)
4. Young, D. M.: Iterative Solution of Large Linear Systems. Academic Press 1971
5. Young, D. M.: Second Degree Iterative Methods for the Solution of Large Linear Systems. Journal of Approx. Theory **5**, 137–148 (1972)
6. Young, D. M.: Convergence Properties of the Symmetric and Unsymmetric Successive Overrelaxation Methods and Related Methods. Mathematics of Computation **24**, 793–807 (1970)

G. Alefeld
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe
Kaiserstraße 12
D-7500 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland

R. S. Varga
Department of Mathematics
Kent State University
Kent, Ohio 44242
U.S.A.