

three treatments the pressure is taken to be the same along and normal to the magnetic field as is appropriate where collisions maintain an isotropic velocity distribution. Thus it will be seen that these treatments are appropriate for the considerations of the effects of collisions in producing the relatively gradual transition from one side of the complete shock to the other, while our treatment is better adapted to the study of the detailed structures. Of course, our treatment is relevant only in the limited range of densities, field strengths, and temperatures for which the gyro-frequency is much greater than

the collision frequency and the pressure is negligible compared to Π .

We are greatly indebted to Professor L. BIERMANN for pointing out the importance of this problem and for his most helpful suggestions. We wish to thank Mr. KATTERBACH for plotting the figures and Mrs. G. HAIN for coding and carrying out the computations on the G 2.

One of us (L. D.) is indebted to the U.S. National Science Foundation for a Fellowship and to the Fulbright Commission for a Travel Grant that made it possible for him to take part in this research. A. S. is indebted to Dr. H. PETSCHKE of AVCO Research Laboratories for many discussions on this subject.

Zur Stabilität zylindersymmetrischer Plasmakonfigurationen mit Volumenströmen

Von K. HAIN und R. LÜST

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforsch. **13 a**, 936—940 [1958]; eingegangen am 31. Juli 1958)

The stability of cylindersymmetric plasma configuration with volume currents is investigated by the method of small perturbations. The problem is reduced to only one eigen-value differential equation of second order. For a special current distribution with relatively strong concentration to the axis the eigen-values are computed numerically. For this current distribution specially for long wave lengths instability shows up. The rates of growth for different kinds of perturbations are given as a function of the wave length.

In einer vorangegangenen Untersuchung von HAIN, LÜST und SCHLÜTER¹ waren allgemeine Bedingungen für die Stabilität hydromagnetischer Gleichgewichtskonfigurationen untersucht worden. In weitgehend analoger Form sind ähnliche Fragen auch in Princeton von BERNSTEIN, FRIEMAN, KRUSKAL und KULSRUD² behandelt worden. Nach KRUSKAL und SCHWARZSCHILD³ ist es bekannt, daß eine zylindersymmetrische Gleichgewichtskonfiguration mit nur an der Oberfläche befindlichen Strömen die sog. Pinch-Instabilität aufweist. Von ROSENBLUTH⁴ und TAYLER⁵ wurde nun gezeigt, daß eine solche Pinch-entladung durch besondere Magnetfelder und Außenleiter zu stabilisieren ist.

In allen praktischen Fällen werden die elektrischen Ströme wegen der endlichen elektrischen Leitfähigkeit nicht ausschließlich an der Oberfläche fließen, sondern die Ströme werden im Laufe der Zeit in das

Plasma eindringen. Ein möglicher Grenzfall wäre dann z. B., daß die sich entwickelnden achsenparallelen Volumenströme konstant sind, d. h. nicht mehr vom Abstand von der Symmetrieachse abhängen. In diesem Fall ergeben die Rechnungen von TAYLER, daß dann auch bei Gegenwart von äußeren Magnetfeldern und Außenleitern eine Stabilisierung nicht zu erreichen ist. Von besonderem Interesse ist es deshalb, wie weit die Volumenströme in das Plasma eindringen dürfen, bis die Gleichgewichtskonfiguration instabil wird.

Im folgenden soll nun der Einfluß von Volumenströmen auf die Stabilität eines Plasmazyllinders genauer untersucht werden. In I war die Stabilität von Gleichgewichtskonfigurationen mit Hilfe der Methode der kleinen Störungen behandelt worden; dabei zeigte sich, daß das Stabilitätsverhalten durch die folgende Vektordifferentialgleichung 2. Ordnung in

¹ K. HAIN, R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **12 a**, 833 [1957]; im folgenden als I zitiert.

² I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. P. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD, Proc. Roy. Soc., Lond. A **244**, 17 [1958].

³ M. P. KRUSKAL u. M. SCHWARZSCHILD, Proc. Roy. Soc., Lond. A **223**, 348 [1954].

⁴ M. ROSENBLUTH, Los Alamos Sci. Lab. LA-2030.

⁵ R. J. TAYLER, Proc. of the third Int. Conf. on Ionized Gases, p. 903 [1957]; Proc. Phys. Soc. B **70**, 1049 [1957].

der Zeit bestimmt ist:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} = & \partial_\beta \left(p + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) \partial_\alpha v^\beta + \partial_\alpha \left[(\gamma - 1) p + \frac{1}{8\pi} B^2 \right] \partial_\beta v^\beta \\ & - \frac{1}{4\pi} \partial_l (B^l B_\alpha \delta_\beta^m + B_\beta B^m \delta_\alpha^l) \partial_m v^\beta + \frac{1}{4\pi} \partial_l B^m B^l g_{\alpha\beta} \partial_m v^\beta. \end{aligned} \quad (1)$$

Hierin sind p = Druck, ϱ = Dichte und B = Magnetfeld der ungestörten Gleichgewichtskonfiguration, v_α = kontravariante Komponente der Störgeschwindigkeit, ∂_l = Differentiationsoperator und $g_{\alpha\beta}$ = der metrische Fundamentaltensor.

Für die Störgeschwindigkeit machen wir den Ansatz

$$v_\alpha(x_i, t) = v_\alpha(x_i) e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Die Gleichgewichtskonfiguration ist dann stabil, wenn die Gl. (1) keine Lösung gestattet, für die $\omega^2 < 0$ ist. Für das Folgende soll nun reine Zylindersymmetrie vorausgesetzt werden, d. h. alle auftretenden Größen der Gleichgewichtslage sollen nur vom Abstand s von der Symmetrieachse abhängen, dagegen nicht vom Abstand z von der Äquatorebene und ebenso nicht vom Azimutwinkel φ . Mit dieser Voraussetzung wird aus Gl. (1)

$$\begin{aligned} \lambda p v_\alpha (p + B^2) \partial_\alpha \operatorname{div} v - \frac{1}{s} (B^\varphi)^2 \partial_\alpha v^s \\ + \frac{1}{2} \frac{dB^2}{ds} \delta_\alpha^s \operatorname{div} v + B^\gamma \partial_\gamma B^s \partial_s v^\alpha \\ - (B^\gamma \partial_\gamma B^2 \operatorname{div} v + \partial_\alpha B^\beta B^s \partial_s v^\beta). \end{aligned} \quad (3)$$

Hier ist $\lambda = -(\omega^2/a^2)$,

wobei a die hydrodynamische Schallgeschwindigkeit sein soll, die im folgenden als unabhängig vom Ort angenommen sei. Außerdem ist $\gamma = 1$ gesetzt worden.

Zur Vereinfachung ist hier und im folgenden $B^2/4\pi$ durch B^2 ersetzt. Die Stabilität einer Gleichgewichtskonfiguration ist also jetzt dadurch gekennzeichnet, daß Gl. (3) keine Lösungen mit Eigenwerten $\lambda > 0$ haben darf. Wegen der vorausgesetzten Zylindersymmetrie machen wir für v^ν den Ansatz:

$$v^\nu(x^i) = v^\nu(s) e^{im\varphi + ikz}. \quad (4)$$

Damit bekommt man für den kovarianten Ableitungen

$$\partial_\gamma v^\beta = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^s}{\partial s} & \frac{\partial v^\varphi}{\partial s} & \frac{\partial v^z}{\partial s} \\ \frac{1}{s} (i m v^s - v^\varphi) & \frac{1}{s} (i m v^s + v^\varphi) & \frac{i m}{s} v^z \\ i k v^s & i k v^\varphi & i k v^z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

wobei v^s , v^φ , v^z die natürlichen Komponenten der Geschwindigkeit sind. Führt man ferner die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \beta^2 = (m^2/s^2) + k^2, \quad A = (m/s) B^\varphi + k B^z, \\ D = (m/s) B^z - k B^\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

(B^φ , B^z natürliche Komponenten des Magnetfeldes) ein, wobei die Beziehung

$$A^2 + D^2 = \beta^2 B^2 \quad (7)$$

gilt, so wird aus Gl. (3):

$$\begin{aligned} -\lambda p v^s = \frac{d}{ds} \left[p \operatorname{div} v + B^2 \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (s v^s) + i D (v^\varphi B^z - v^z B^\varphi) \right] - \left[A^2 + s \frac{d}{ds} \left(\frac{B^\varphi}{s} \right)^2 \right] v^s - 2 i k B^\varphi (v^\varphi B^z - v^z B^\varphi), \\ -\lambda p v^\varphi = \frac{i\alpha}{s} p \operatorname{div} v + i D B^z \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (s v^s) + 2 i k \frac{B^\varphi}{s} B^z v^s - \beta^2 B^2 (v^\varphi B^z - v^z B^\varphi), \\ -\lambda p v^z = i k p \operatorname{div} v - i D B^\varphi \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (s v^s) - 2 i k \frac{B^\varphi}{s} + \beta^2 B^\varphi (v^\varphi B^z - v^z B^\varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Aus diesen drei Diff.-Gln. für v^s , v^φ und v^z lassen sich nun v^φ und v^z vollständig eliminieren und man bekommt so eine Diff.-Gl. 2. Ordnung für v^s :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{\lambda(p+B^2)+A^2}{\Delta} \left\{ (\lambda p + A^2) \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (s v^s) - \frac{2k}{s} B^\varphi D v^s \right\} \right] \\ + \frac{\lambda(p+B^2)+A^2}{\Delta} \frac{2k}{s} B^\varphi D \frac{d}{ds} (s v^s) - \left[\lambda p + A^2 + s \frac{d}{ds} \left(\frac{B^\varphi}{s} \right)^2 - \frac{\lambda B^2 + A^2}{\Delta} \frac{4k^2}{s^2} (B^\varphi)^2 \right] v^s = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

wobei Δ gegeben ist durch:

$$\Delta = \lambda^2 p + \beta^2 [\lambda(p+B^2) + A^2], \quad (10)$$

während für v^φ und v^z gilt

$$v^\varphi = \frac{i}{\Delta} \left(\frac{\lambda m}{s} p + \beta^2 A B^\varphi \right) \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (s v^s) + (\lambda B^z + k A) \left[D \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (s v^s) + \frac{2k}{s} B^\varphi v^s \right], \quad (11 a)$$

$$v^z = \frac{i}{\Delta} (\lambda k p + \beta^2 A B^z) \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (s v^s) - \left(\lambda B^\varphi + \frac{m}{s} A \right) \left[D \frac{1}{s} \frac{d}{ds} (s v^s) + \frac{2k}{s} B^\varphi v^s \right]. \quad (11 b)$$

Für alle $\lambda > 0$ ist $\Delta \neq 0$ und nur dann ist die hier angegebene Elimination in dieser Form durchführbar.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\delta^2 = s^2 \beta^2 = m^2 + k^2 s^2, \quad L = B^\varphi / s,$$

$$F = \lambda p + A^2, \quad G = \lambda(p + B^z) + A^2, \quad (12)$$

$$E = s^2 \Delta = s^2 \lambda^2 p + \delta^2 G, \quad K = s D = B^z - s^2 k L,$$

$$g = F G / E,$$

dann ergibt sich

$$\frac{d}{ds} \left[g s \frac{d}{ds} (s v^s) \right] = \left\{ F + s \frac{dL^2}{ds} - 4 k^2 L^2 s^2 \frac{G - \lambda p}{E} + 2 k s \frac{d}{ds} \left(\frac{L K G}{E} \right) \right\} v^s. \quad (13)$$

Das Stabilitätsproblem von zylindersymmetrischen Gleichgewichtskonfigurationen ist somit auf die eine Eigenwertgleichung (13) zurückgeführt. Die Konfiguration wird nur dann stabil, wenn die Diff.-Gl. (13) für alle k und m keine Eigenlösungen mit $\lambda > 0$ gestattet. Zur Lösung dieser Diff.-Gl. müssen noch die Randwerte von v^s angegeben werden.

Für $s=0$ müssen wir fordern, daß v^s regulär bleibt. Außerdem erfordert die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d}{ds} \left(p + \frac{1}{2} B^z \right) = - \frac{(B^\varphi)^2}{s}, \quad (14)$$

daß für $s \rightarrow 0$ die azimutale Komponente des Magnetfeldes $B^\varphi \sim s$ ist, da der Gasdruck und der magnetische Druck keine Spitze auf der Symmetrieachse haben dürfen, d. h. daß $dp/ds=0$ und $dB^z/ds=0$ für $s=0$ sein müssen. Eine weitere Randbedingung für v^s kann entweder im Endlichen für $s=s_0$ oder $s \rightarrow \infty$ vorgegeben werden. Nimmt man an, daß außerhalb $s=s_0$ Vakuum vorliegt, so ergeben sich die Randbedingungen aus der Forderung, daß für $s > s_0$ die MAXWELLSCHEN Gleichungen im Vakuum gelten müssen. Die entsprechenden Übergangsbedingungen sind z. B. bei KRUSKAL und SCHWARZSCHILD³ angegeben. Insbesondere muß für $s=s_0$ die Rotation des Störmagnetfeldes $\text{rot } \delta \mathfrak{B} = 0$ sein, da dort keine Ströme fließen sollen. Legt man die Ränder ins Unendlichferne und fordert, daß dort $v^s = 0$ sein soll,

und wählt den Druck so, daß er dort zu Null wird, so bekommt man mit dieser Annahme die im Vergleich zum Vakuum etwas schwächeren Bedingungen, daß für $s \rightarrow \infty$

$$[\mathfrak{B} \times \text{rot } \delta \mathfrak{B}] = 0 \quad (15)$$

ist. Im folgenden wollen wir stets diese Randbedingung für v^s im Unendlichen zugrunde legen. Für die sich ergebenden Eigenwerte hat dies zur Folge, daß die Eigenwerte etwas größer ausfallen sollten gegenüber denen, die sich mit den Randbedingungen des Vakuums für $s=s_0$ ergeben würden. Uns wird es aber im Laufe der Untersuchung nicht so sehr auf die absoluten Werte der Eigenwerte ankommen, als vielmehr auf den Vergleich der Eigenwerte bei verschiedenen Stromverteilungen und verschiedenen achsenparallelen Magnetfeldern B^z .

Für das asymptotische Verhalten von v^s in der Umgebung des Nullpunktes ($s=0$) bekommt man, da $B^\varphi \sim s$ ist, für den Fall $m \neq 0$

$$v^s \sim s^{\pm(m-1)}, \quad (16 a)$$

während für $m=0$ gilt

$$v^s \sim s. \quad (16 b)$$

Im Unendlichfernen ergibt sich unter der Voraussetzung, daß dort kein elektrischer Strom fließen soll, d. h. $B^\varphi \sim 1/s$, und daß dort der Druck gegen Null geht, während $B^z \neq 0$ sei,

$$v^s \sim \frac{1}{\sqrt{s}} e^{\pm ks}. \quad (17)$$

Aus diesem asymptotischen Verhalten von v^s folgt, daß es für $\lambda > 0$, $B^z \neq 0$ kein kontinuierliches Spektrum geben kann. (Die Voraussetzung $\lambda > 0$ ist notwendig, damit der Koeffizient der zweiten Ableitung von Diff.-Gl. (13) keine Null- bzw. Unendlichkeitsstelle besitzt.)

Zur Erfüllung der oben diskutierten Randbedingungen für v^s ist es notwendig, daß die Diff.-Gl. (13) oszillatorische Lösungen besitzt. Das bedeutet, daß der Koeffizient der rechten Seite von v^s nicht im ganzen Bereich positiv sein darf. Im Falle $\lambda < 0$ kann das immer erreicht werden, d. h. stabile Lösungen

der Diff.-Gl. existieren stets. Im Fall $\lambda > 0$ ist das erste Glied der rechten Seite, nämlich F , im ganzen Bereich positiv, während die anderen Glieder sowohl für $s=0$ wie auch für $s=\infty$ verschwinden. Damit die rechte Seite ihr Vorzeichen wechseln kann, müssen diese Glieder wenigstens in einem Teilbereich F überwiegen. F wird bei vorgegebenem λ minimal, wenn k und B^z entgegengesetztes Vorzeichen haben ($B^z > 0$ und $m > 0$). Falls man also für diesen Fall Stabilität findet, ist auch sicher die Störung mit $k B^z > 0$ stabil. Für wachsendes m muß man auch k vergrößern, um F minimal zu machen. Deshalb sollten für größere m die Instabilitäten, wenn überhaupt, bei größeren Werten von k liegen.

Für die numerische Integration ergibt sich die Schwierigkeit, daß g für $\lambda > 0$ für gewisse Stellen, an denen

$$(m/s) B^z = k B^z \tag{18}$$

sehr klein wird. g geht sogar durch Null, wenn $\lambda < 0$, es unterscheidet sich also dadurch Stabilität wesentlich von der Instabilität. Um diesen Schwierigkeiten zu begegnen, wurden folgende zwei Transformationen durchgeführt; statt s wurde die neue unabhängige Variable t und statt v^s wurde w eingeführt. Ferner wurde dafür gesorgt, daß für kleine s $t \sim s^2$ ist, da sich dieses für die numerische Integration als vorteilhaft erwiesen hat.

Man erhält mit

$$z = (s/s_0)^2, \tag{19}$$

$$dz = 4 z^{3/4} \sqrt{g(z)/g(0)} dt, \tag{20}$$

$$v^s = z^{-s/8} [g(z)/g(0)]^{-1/4} w, \tag{21}$$

und die Diff.-Gl.

$$d^2w/dt^2 = H w, \tag{22}$$

$$z^{1/2} g(0) H = 4 F - g/4 + z \left[5 \frac{dg}{dz} + 16 \left(L \frac{dL}{dz} \right) \right] \tag{23}$$

$$- k^2 \frac{G - \lambda P}{E} L^2 + k \frac{d}{dz} \left(\frac{G K L}{E} \right) + z^2 \left[4 \frac{d^2g}{dz^2} - \frac{1}{g} \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 \right].$$

Man könnte daran denken, das vorliegende nichtlineare Eigenwertproblem auf die folgende Weise zu befriedigen. Man löse das folgende lineare Ersatz eigenwertproblem

$$w'' - H w = \epsilon w \tag{24}$$

mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens und ändere den Parameter λ so ab, bis $\epsilon = 0$ geworden ist; es hat dann den gesuchten Wert λ . Leider ergibt sich bei etwas genauerer Untersuchung, daß die durch dieses Ritzsche Verfahren gelieferten Eigenwerte λ immer zu klein sind, d. h. wenn man ein $\lambda < 0$ gefunden hat, ist man nicht sicher, ob diese Konfiguration stabil ist oder nicht.

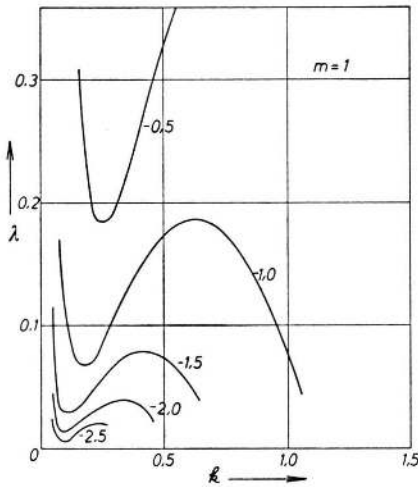


Abb. 1.

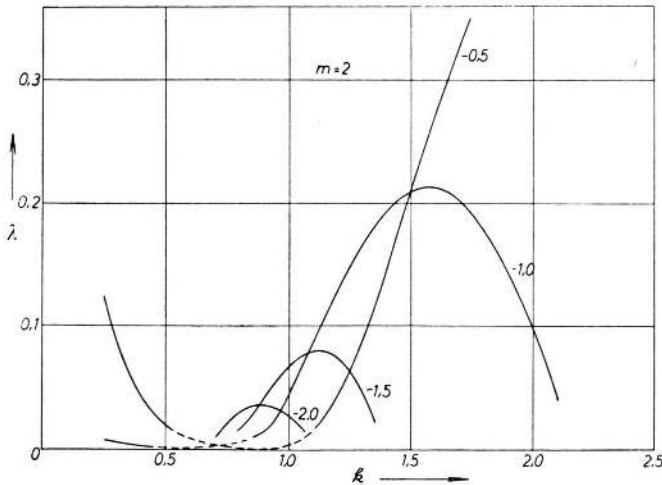


Abb. 2.

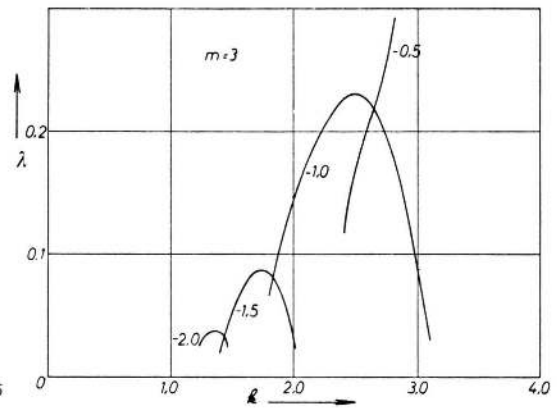


Abb. 3.

Abb. 1-3. Anwachsraten $\lambda = -\omega^2/a^2$ in Abhängigkeit von der Wellenzahl k für $m=1, 2, 3$.

Als recht brauchbar hat sich folgendes Verfahren ergeben. Man integriere numerisch die beiden Diff.-Gl. von $v^s = 0$ aus, stelle dann fest, ob die Funktion w nach oben wegläuft, d. i. positiv unendlich wird, dann war $\lambda = \lambda_{ob}$ zu groß oder nach unten, d. i. w negativ unendlich, dann war $\lambda = \lambda_{un}$ zu klein. Dann bilde man

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{ob} + \lambda_{un}) \quad (25)$$

und stelle wieder fest, ob mit diesen λ die Funktion w positiv oder negativ unendlich wird usw.

In dieser Arbeit soll nun die folgende spezielle elektrische Stromverteilung untersucht werden, während in einer weiteren Arbeit dann allgemeinere Stromverteilungen behandelt werden sollen. Der elektrische Strom in Richtung der Symmetrieachse habe die folgende Gestalt:

$$j_z(s) = \frac{2}{s_0} \frac{1}{[1 + (s/s_0)^2]^2} \quad (26 a)$$

und $B^z = b = \text{const.} \quad (26 b)$

Damit bekommt man

$$B^\varphi(s) = \frac{s/s_0}{1 + (s/s_0)^2} \quad (26 c)$$

und

$$p = \frac{1}{2} \frac{1}{[1 + (s/s_0)^2]^2} \quad (26 d)$$

s_0 ist die Stelle, an der B^φ sein Maximum hat.

Die nebenstehenden Kurven wurden auf die beschriebene Weise für die in der Gl. (18) angegebenen Magnetfelder berechnet. Zunächst ergab sich, daß für $m = 0$ für alle hier betrachteten Magnetfelder B^z d. i. $b \geq 0,5$, die Konfigurationen sicher stabil waren.

Da der Rechenaufwand für kleiner werdende k beträchtlich ansteigt (und auch sonstige Schwierigkeiten sekundärer Art, wie exponentielles Ansteigen

der Fehler usw. auftreten), wurden diese Rechnungen nur in einigen Fällen durchgeführt. Es ergab sich ein sehr steiles Anwachsen der Anstiegsrate λ für kleiner werdendes k . Aus den numerischen Rechnungen kann man aber entnehmen, daß, wenn man die Randbedingungen $v(R) = 0$, d. h. einen Leiter im Abstand R anbringt, diese Anwachsrate mit kleiner werdendem R wesentlich herabgesetzt werden.

Die Rechnungen zeigen ein ähnliches Resultat wie die von TAYLER mit konstanten Volumenströmen. Die Maxima der Anstiegsraten verschieben sich mit wachsendem m nach größerem k . Aus den Rechnungen kann man folgendes Verhalten für die Lage der Maxima ablesen

$$k_{\max} \approx 0,8(m/b). \quad (27)$$

Für die Maxima selber gilt

$$\lambda_{\max} \approx -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{0,36|b|} - 1 \right) \frac{5}{4}, \quad m = 1, \quad (28)$$

$$\lambda_{\max} \approx -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{0,42|b|} - 1 \right) \left(1 + \frac{m}{4} \right), \quad m = 2, 3. \quad (29)$$

Falls es erlaubt ist (nach großem m und großem b) zu extrapolieren, so kann man sagen, daß Stabilität vorliegt, außer für sehr lange Wellenlängen, wenn $|b| > 3$ oder wenn das stabilisierende B^z etwa den sechsfachen Betrag des maximalen B^φ -Feldes übersteigt, lange Wellenlängen lassen sich aber, wie von TAYLER⁵ gezeigt worden ist, durch äußere Leiter im wesentlichen stabilisieren.

Wir danken Herrn Prof. Dr. W. HEISENBERG und Herrn Dr. A. SCHLÜTER für zahlreiche Diskussionen, Herrn Dr. H.-L. DE VRIES für die Programmierung der Rechnung für die G 2, Frau G. HAIN für die Durchführung der numerischen Rechnungen.