

bildeten, ist auch jetzt noch, nachdem durch die vorliegenden Untersuchungen das Dulong-Petit'sche Gesetz zum allgemein gültigen erhoben worden ist, unerläßlich, sobald die Wandelbarkeit der specifischen Wärmen dieser Elemente erklärt werden soll.

Welche besonderen Annahmen über die Constitution der Atome in dieser Beziehung gemacht werden müssen, um alle Thatsachen der Erfahrung ableiten zu können, kann erst übersehen werden, nachdem ein möglichst umfassendes Erfahrungsmaterial über das Verhalten der specifischen Wärme der Elemente Kohlenstoff, Bor und Silicium im isolirten Zustande und in chemischen Verbindungen vorliegt.

Ich werde daher erst in einer letzten, abschließenden Abhandlung, theoretischen Inhalts, auf diese Erklärungen eingehen.

Akademie Hohenheim im Oktober 1874.

V. *Zur Theorie der anomalen Dispersion;*
von H. Helmholtz.

(Aus d. Monatsber. d. K. Akad. d. Wissensch. Octob. 1874.)

Hr. W. Sellmeier hat in Pogg. Annal. Bd. 145, S. 399 und 520, Bd. 147, S. 386 und 525 eine Theorie der anomalen Dispersion gegeben, welche von den bisher beschriebenen wesentlichen Zügen des genannten Phänomens Rechenschaft zu geben wohl geeignet ist. Die Grundlage seiner Erklärung ist die Annahme von ponderablen in den Aether eingelagerten Molekeln, welche des Mitschwingens fähig sind. Nur für diejenigen Fälle bietet seine Hypothese Schwierigkeiten, wo die eigene Schwingungsperiode der mitschwingenden Molekeln der der Lichtoscillationen gleich

wird. Dann nämlich tritt thatsächlich Absorption des Lichtes ein, das heißt Vernichtung der lebendigen Kraft der Lichtschwingungen. Nun hat aber Hr. Sellmeier in seine Rechnungen keine Kraft eingeführt, welche die mechanische Arbeit der schwingenden Bewegung vernichten, beziehlich in Wärme verwandeln könnte, sondern hilft sich für diesen Fall mit Betrachtungen, die das Wesen des Vorgangs vielleicht richtig beschreiben mögen, aber vorläufig den Nachtheil haben, keiner analytischen Fassung zugänglich zu seyn.

Ein zweiter Aufsatz über die Theorie desselben Phänomens ist von Hrn. Ketteler im Jubelbande von Pogg. Annal. gegeben worden. Der Autor geht darin nicht unmittelbar zurück auf die Mechanik der Aetherschwingungen, sondern hat sich nur bemüht, Formeln für die Abhängigkeit des Brechungscoefficienten von der Wellenlänge den Experimenten anzupassen. Diese Formeln sind aber nach Analogie derjenigen gebildet, welche er selbst in früheren Aufsätzen aus der Annahme mitschwingender Atome hergeleitet hatte. Auch hier sind Kräfte, welche Absorption bedingen können, nicht in die Rechnung eingeführt. Die Folge davon ist, daß die angewendeten Formeln zum Theil zwei oder mehrere Werthe für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Brechung ergeben und kein bestimmter Grund erhellt, warum gerade der eine oder andere Zweig der Curven als der den thatsächlichen Verhältnissen entsprechende gewählt wird.

Andererseits hat Hr. O. E. Meyer (Poggend. Annal. Bd. 145, S. 80) Reibung im Aether, aber ohne mitschwingende Theilchen angenommen und daraus wohl Aenderungen der Brechung in dem gewünschten Sinne, aber keine Absorption eines eng begränzten Farbstreifens ableiten können.

Ich habe nun versucht, die von Hrn. Sellmeier gegebene Erklärung in der Weise umzubilden, daß ich eine Reibungskraft, welche der Bewegung der ponderablen Molekeln entgegenwirkt, in derselben Form eingeführt habe,

wie sie sich bei den langsameren Schwingungen des Pendels und der tönenden Körper wohl bewährt und eine mit den Versuchen gut zusammenstimmende Theorie des Mitschwingens ergeben hat. Die Untersuchung hat auch für einen mit mitschwingenden Theilchen beladenen Aether gute Resultate ergeben und wenn man sich dabei auf die einfachsten, für das Wesen des Phänomens nothwendigsten Annahmen beschränkt, so gewinnt man eine verhältnißmäßsig einfache und kurz zusammenfassende Theorie.

Um zunächst die Verwickelungen zu beseitigen, welche die Einführung discontinuirlich vertheilter Molekeln in der Rechnung hervorbringt, Schwierigkeiten, deren Ueberwindung übrigens in den von Cauchy und seinen Nachfolgern ausgebildeten theoretischen Arbeiten gelehrt wird, nehme ich an, daß die ponderablen Atome dicht genug liegen, um alle Theile der zwischen ihnen liegenden Aethermassen in merklich gleichmäßiger Weise zu afficiren, so als ob der Aether und die mit ihm schwingenden ponderablen Atome zwei sich gegenseitig durchdringende continuirliche Medien bilden, welche sich gegen einander verschieben können. Eine solche Annahme wird erlaubt seyn, wenn die Entfernungen der ponderablen Theile von einander verschwindend klein gegen die Wellenlängen sind.

Ferner wird es genügen, hier nur eine Art ponderabler Atome anzunehmen, welche in Mitschwingungen versetzt werden. Wir beschränken uns auf die Untersuchung ebener Wellen, die sich in Richtung der y fortpflanzen. Es sey mit x die Verschiebung der ponderablen Theilchen, mit ξ die der Aethertheilchen zur Zeit t bezeichnet für eine Schicht, deren Coordinate y ist.

Wenn nur die Elasticität des Aethers wirkt, ist die Bewegungsgleichung des Aethers für ebene Wellen bekanntlich von der Form

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2},$$

worin μ die Dichtigkeit und α^2 die Elasticitätsconstante des Aethers bezeichnet. Die linke Seite dieser Gleichung

drückt die für die Volumeneinheit berechnete Kraft durch die Beschleunigung aus, die der Aether erleidet; die rechte Seite giebt dieselbe Kraft, als herrührend von der elastischen Deformation des benachbarten Aethers.

Um nun die Bewegungsgleichung zu vervollständigen für den Fall, daß eingelagerte ponderable Theile, die aber wie ein continuirliches Medium wirken, eine Kraft auf den Aether ausüben, werden wir für unendlich kleine Verschiebungen (als welche die Lichtschwingungen ja immer vorzustellen sind) diese Kraft der relativen Lagenänderung des Aethers gegen das System der benachbarten ponderablen Atome proportional setzen dürfen und erhalten so

1. *Die Bewegungsgleichung des Aethers*

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \beta^2 (x - \xi) \quad . \quad . \quad (1).$$

Dazu kommt die Bewegungsgleichung der ponderablen Atome, deren Dichtigkeit wir mit m bezeichnen. Auf die Volumeneinheit berechnet wäre $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ die auf sie wirkende Kraft, gemessen durch die Beschleunigung. Andererseits wird diese Kraft zusammengesetzt seyn:

a) aus der Kraft, die der Aether auf die ponderablen Atome ausübt, nämlich $\beta^2 (\xi - x)$;

b) aus der Kraft, welche die übrigen, relativ festliegenden Theile der ponderablen Massen, wenn solche da sind, auf den bewegten Theil ausüben. Wiederum mag hier zur Vereinfachung der Rechnung die der Wirklichkeit wohl nicht ganz entsprechende, mechanisch aber unanstößige Annahme gemacht werden, daß schwere centrale Massen der Molekeln festliegen und die beweglichen Theile derselben gegen diese und den Aether eine bestimmte Gleichgewichtslage zu bewahren streben. Bei der Verschiebung der beweglichen Atome um x setzen wir die Kraft, welche sie in die Gleichgewichtslage zurückführt, gleich $-\alpha^2 x$.

c) Wenn Absorption stattfindet, muß lebendige Kraft der Wellenbewegung in innere unregelmäßige Bewegung

der Molekeln, d. h. in Wärme, übergeführt werden, durch einen der Reibung im Resultat ähnlichen Vorgang. Wir nehmen also noch eine der Reibung ähnliche Kraft an zwischen dem beweglichen und dem festliegenden Theil der Atome jedes Molekels und setzen diese gleich $-\gamma^2 \cdot \frac{dx}{dt}$.

2. Die Bewegungsgleichung der mitschwingenden Atome ist dann

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \beta^2 (\xi - x) - a^2 x - \gamma^2 \frac{dx}{dt} \quad (1a).$$

Durch die beiden Gleichungen (1) und (1a) ist die Bewegung ebener Wellen vollständig bestimmt.

Ein entsprechendes particuläres Integral ist

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A} e^{i\gamma t - int} \\ x &= A e^{i\gamma t - int} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen (1) und (1a), so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [-\mu n^2 - \alpha^2 l^2 + \beta^2] \mathfrak{A} &= \beta^2 A \\ [-m n^2 + a^2 + \beta^2 - \gamma^2 in] A &= \beta^2 \mathfrak{A} \end{aligned} \right\} (2a).$$

Das Product beider Gleichungen ergibt nach Weglassung des Factors $A\mathfrak{A}$

$$(\mu n^2 + \alpha^2 l^2)(m n^2 - a^2 + \gamma^2 in) - \beta^2 [m n^2 - a^2 + \gamma^2 in + \mu n^2 + \alpha^2 l^2] = 0$$

oder

$$-\frac{l^2}{n^2} = \frac{u}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} \left[1 + \frac{\beta^2}{m n^2 - a^2 - \beta^2 + \gamma^2 in} \right] (2b).$$

Diese Bedingung muß also zwischen den Constanten der Gleichung (2) erfüllt seyn, wenn sie als Integrale der Gleichungen (1) und (1a) zulässig seyn sollen. Demnächst ist dann mittelst der Gleichungen (2a) das Verhältniß $\mathfrak{A}:A$ zu bestimmen.

Soll die in (2) dargestellte Bewegung rein periodische Oscillationen darstellen, so muß n reell seyn. Dann wird l der Regel nach complex seyn. Wir wollen es schreiben

$$l = -k + \frac{in}{c} \dots \dots (2c).$$

Darin wird k den Absorptionscoefficienten darstellen und c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit; unter k und c sind reelle Werthe zu verstehen.

Setzen wir diese Werthe in (2b) und trennen das Reelle vom Imaginären, so erhalten wir folgende zwei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} &= \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} - \frac{\beta^4}{\alpha^2 n^2} \cdot \frac{mn^2 - a^2 - \beta^2}{(mn^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 n^2} = F \\ \frac{2k}{cn} &= \frac{-\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2 n} \cdot \frac{1}{(mn^2 - a^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4 n^2} = G \end{aligned} \right\} (2d),$$

durch deren Auflösung k und c gefunden werden können. Man setze

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= \rho \cos \omega, \\ \frac{k}{n} &= \rho \sin \omega, \end{aligned}$$

wobei ω im ersten Quadranten liege, während ρ positiv oder negativ seyn kann. Dann sind die oben gefundenen Werthe von

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} &= \rho^2 \cos 2\omega = F, \\ \frac{2k}{cn} &= \rho^2 \sin 2\omega = G. \end{aligned}$$

und daraus ρ und ω also auch $\frac{1}{c}$ und $\frac{k}{n}$ zu finden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{F^2 + G^2} + \frac{1}{2} F, \\ \frac{k^2}{n^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{F^2 + G^2} - \frac{1}{2} F. \end{aligned}$$

Die Wurzel muß hier positiven Werth haben, da ihr Werth gleich ρ^2 seyn soll.

Gang der Function bei schwacher Absorption.

Ist $G^2 < F^2$ und F positiv, so kann man diese Werthe in die Reihe entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c^2} &= F + \frac{F}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{G^2}{F^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{G^4}{F^4} \text{ etc.} \right) \\ \frac{k^2}{n^2} &= \frac{1}{c^2} - F = \frac{G^2}{4F} - \frac{G^4}{16F^3} \text{ etc.} \end{aligned} \right\} (2e).$$

Wenn F negativ ist, giebt die obere Reihe den Werth von $-\frac{k^2}{n^2}$ und die untere den von $\frac{1}{c^2}$. In den sichtbaren Theilen des Spectrums, wo die Absorption gering, also G relativ sehr klein ist, wird man in den beiden Reihen nur die grössten Glieder zu berücksichtigen haben und annähernd setzen können:

$$\frac{1}{c^2} = F \text{ und } k = \frac{n}{2} \cdot \frac{G}{\sqrt{F}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{G}{F} = 2 \frac{kc}{n} = 2k\lambda,$$

wenn wir die Wellenlänge mit λ bezeichnen, und die Annahme, daß G klein gegen F sey, bedeutet also, daß in einer Strecke von zwei Wellenlängen nur wenig Licht absorbirt werde. Es wird dies bei den gewöhnlich gebrauchten Lösungen von Farbstoffen, die anomale Dispersion zeigen, zutreffen.

Der Werth von k ergibt sich auch aus der zweiten der Gleichungen (2d) in folgender Form

$$\frac{k}{c} = \frac{1}{2} n G = \frac{-\beta^4 \gamma^2}{2 \alpha^2 m^2} \cdot \frac{1}{(n^2 - n^2)^2 + 4(n^2 + p^2)p^2} \quad (3),$$

worin gesetzt ist

$$m n^2 = a^2 + \beta^2 - \frac{\gamma^4}{2m} \text{ und } p^2 = \frac{\gamma^4}{4m^2}.$$

Die Form der Gleichung n zeigt, daß der Werth von $\frac{k}{c}$ bei sich ändernder Schwingungszahl n ein Maximum erreicht, wenn $n = n$. Das letztere giebt also die mit 2π multiplicirte Schwingungszahl des stärkst absorbirten Streifen. Bezeichnen wir diesen Maximalwerth von k mit k_0 und den entsprechenden von c mit c_0 , so wird

$$\frac{k_0}{c_0} = \frac{-\beta^4}{2 \alpha^2 \gamma^2} \cdot \frac{1}{(n^2 + p^2)} \quad \dots \quad (3a).$$

Bei gleichbleibender Lage des Absorptionsmaximum im Spectrum, das heißt bei gleichbleibendem Werthe von n , wird also die Gröfse $\frac{k_0}{c_0}$ desto gröfser werden, je gröfser β^4

im Verhältniß zu γ^2 ist, also je größer β , d. h. die den Aether mit den Körpertheilen verbindende Kraft und je kleiner γ , die Reibungskraft ist.

Die Gleichung (3) können wir nun auf die Form bringen:

$$\frac{c}{k} = \frac{c_0}{k_0} \left(1 + \frac{(n^2 - n'^2)^2}{4p^2(n^2 + p^2)} \right) \quad . \quad . \quad (3b).$$

Bei gleichbleibender Farbe n ist $\frac{k}{c}$ nicht das Maafs der Absorption für gleichbleibende absolute Dicken der absorbirenden Schicht, sondern für gleichbleibende Zahlen von Wellenlängen. Wenn die Brechungsverhältnisse nicht allzusehr variiren, werden beide Größen sich aber nicht sehr wesentlich unterscheiden. Die Gleichung (3b) zeigt nun, daß wenn n und n' constant gehalten werden, die Größe $\frac{h}{c}$ um so größer im Verhältniß zum Maximum der Absorption $\frac{k_0}{c_0}$ ist, je größer

$$p^2 = \frac{\gamma^4}{4m^2}.$$

Das heißt, große Werthe des Reibungscoefficienten γ^2 und kleine der mitschwingenden Massen m geben breite Absorptionsstreifen, umgekehrt kleine von γ^2 und größere von m schmale Absorptionsstreifen.

Wenn nun die Anzahl der eingelagerten Atome derselben Art zunimmt, wird, falls keine anderweitige Aenderung der Structur erfolgt, γ^2 , welches die auf die Volumeneinheit von m ausgeübte Reibung mißt, proportional m wachsen, also die Breite des Absorptionsstreifens, bei Schichten, die seine Mitte gleich stark verdunkeln, nahehin gleich bleiben.

Unter denselben Verhältnissen würde aber auch β^2 , welches die auf die Volumeneinheit von m ausgeübte elastische Kraft mißt, wie m wachsen, und das Maximum der Absorption $\frac{k_0}{c_0}$ bei gleicher Dicke der absorbirenden Schicht also wachsen.

Nachdem wir so unter Voraussetzung, daß G klein gegen F sey, den Gang der Absorption, den die Formeln geben, untersucht haben, gehen wir unter Festhaltung derselben Voraussetzung dazu über, den Gang der Brechung zu bestimmen. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im freien Raum mit C , so ist das Brechungsverhältniß N unseres Medium

$$N^2 = \frac{C^2}{c^2}$$

für $n = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{m}$, welches nahehin der Werth für den Streifen der stärksten Absorption ist, wollen wir es mit \mathfrak{N} bezeichnen. Die obigen Gleichungen ergeben

$$\mathfrak{N}^2 = C^2 \left(\frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} \right),$$

wir erhalten demnach unter den gemachten Voraussetzungen und mit Anwendung der vorher für n und p festgestellten Werthe:

$$N^2 - \mathfrak{N}^2 = - \frac{C^2 \beta^4 (n^2 - n^2 - 2p^2)}{\alpha^2 n^2 m [(n^2 - n^2)^2 + 4p^2 (n^2 + p^2)]} \quad (4).$$

Der Ausdruck in den Parenthesen erreicht seine Gränzwerte, wo

$$4p^2 (n^2 + p^2) = (n^2 - n^2)^2 - 4p^2 (n^2 - n^2) \quad (4a).$$

Bei schmalen Absorptionsstreifen können wir die Aenderung des Factors n^2 vor der Parenthese vernachlässigen und ist, wie sich oben zeigte, p^2 klein gegen n^2 . Vernachlässigen wir es, so ergiebt die Gleichung (4a) für die Gränzwerte

$$n^2 - n^2 = \pm 2np = \pm \frac{n\gamma^2}{m}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (3b) würde dies für das Maximum und Minimum der Brechung, so lange die gemachten Vernachlässigungen zulässig sind, ergeben

$$\frac{k}{c} = \frac{1}{2} \frac{k_0}{c_0}.$$

An Stelle des Maximum und Minimum der Brechung würde also eine doppelt so dicke Schicht als für die Farbe

der stärksten Absorption nöthig seyn, um die gleiche Absorption hervorzubringen, so daß diese Gränzwerte der Brechung schon immer in die wegen der Absorption schwer zu beobachtenden Theile des Spectrums fallen.

Für die Gränzwerte von N wird annähernd

$$N^2 - \mathfrak{N}^2 = \pm C^2 \frac{\beta^4}{2\alpha^2 n^2 \gamma^2} = \pm \mathfrak{N} \cdot C \frac{k_0}{n}.$$

Ist der Unterschied zwischen N und \mathfrak{N} klein, und bezeichnen wir die Wellenlänge im freien Raum für die Farbe von n Schwingungen mit $\lambda_0 = \frac{1}{n} \cdot C$, so wird die letzte Gleichung

$$N - \mathfrak{N} = \pm \frac{1}{2} k_0 \lambda_0.$$

Die Größe $e^{-\frac{1}{2}k_0 \lambda}$ ist aber der Bruchtheil des eintretenden Lichts, welcher durch eine Schicht von der Dicke $\frac{1}{2}\lambda$ wiederaustritt, wenn das Licht der am stärksten absorbirten Farbe angehört. Es ist also die durch die Absorption bedingte maximale Aenderung des Brechungscoefficienten nach der hier entwickelten Theorie gleich dem logarithmischen Decrement der Lichtstärke, genommen für eine Schicht, deren Dicke einer halben Wellenlänge der entsprechenden Farbe im freien Raume gleich ist. In so dünnen Schichten zeigen übrigens nur sehr kräftig absorbirende Mittel überhaupt eine merkliche Verminderung der Lichtstärke; nur von solchen wäre also ein erheblicher Grad anomaler Dispersion zu erwarten.

Nach den von Hrn. Christiansen (Poggendorff's Annalen Bd. 143, S. 254) veröffentlichten Messungen beträgt für eine concentrirte Fuchsinlösung der Unterschied der Brechungsverhältnisse für das Maximum bei D und das Minimum bei $(F\frac{1}{2}G)$ 0,276. Davon würden 0,006 auf den Alkohol zu rechnen seyn, und die Hälfte des Restes 0,135 würde unserem $N - \mathfrak{N}$ entsprechen. Daraus würde folgen, daß in der Dicke einer halben Wellenlänge die Amplitude des am stärksten absorbirten grünen Lichts auf 0,8737, die Intensität auf 0,7634 reducirt würde. Reduction auf $\frac{1}{10}$ der Intensität würde eintreten, wenn die Dicke der

Schicht 8,528 halbe Wellenlängen beträgt. In der That zeigte mir eine concentrirte Fuchsinlösung, die ich zwischen zwei zur Demonstration Newton'scher Ringe bestimmte Glaslinsen gebracht hatte, daß der mittlere kreisförmige Fleck, durch den man auch das spectrale Grün sehen konnte, etwas breiter war, als die Stelle, welche Newton'sche Ringe zeigte. Das zeigt vorläufig wenigstens, daß die wirklich stattfindende Absorption von derselben Größenordnung ist, wie die theoretisch verlangte. Eine genaue Uebereinstimmung nachzuweisen wird das Fuchsin kaum geeignet seyn, da es nach einer Bemerkung von Kundt zwei Maxima der Absorption hat.

Uebrigens geht hieraus auch hervor, daß bei solchen Medien, welche beträchtliche anomale Dispersion zeigen, in der Mitte des Absorptionsstreifens die Bedingungen nicht mehr zutreffen, unter denen die bisher auseinandergesetzte abgekürzte Rechnung ausreichend ist, wenn dieselbe immerhin für die weniger absorbirten Theile des Spectrum auch noch zulässig bleibt.

Gang der Function bei stärkerer Absorption, wo die bisher gemachten Vernachlässigungen nicht mehr zulässig sind.

Für sehr große n wird annähernd

$$F = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2} \quad \text{und} \quad G = \frac{\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2 m} \cdot \frac{1}{n^5},$$

also G verschwindend klein gegen F . Es bleibt deshalb, wie bisher

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2},$$

$$k = \frac{-\beta^4 \gamma^2}{2\alpha m \sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{n^4}.$$

Die Absorption wird also verschwindend klein und das Brechungsverhältniß nähert sich bei steigender Schwingungszahl einem festen Werthe

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2}.$$

Wären die Dichtigkeit μ des Aethers und seine Elasticitätsconstante α^2 für das durchsichtige Medium dieselben wie für den freien Raum, so würde das Brechungsverhältniß für die schnellsten Oscillationen gleich 1 werden, was nicht zulässig erscheint den Beobachtungen gegenüber. Man muß also in den durchsichtigen Medien entweder eine solche veränderte Structur des Aethers annehmen, daß $\frac{\mu}{\alpha^2}$ größer als im freien Raume wird oder mit Hrn. Sellmeier annehmen, daß jenseits des Ultraviolett in jedem Spectrum einer durchsichtigen Substanz starke Absorptionen vorkommen, welche im ganzen sichtbaren Spectrum das Brechungsverhältniß in die Höhe treiben.

Für sehr kleine Werthe von n andererseits wird

$$F = - \frac{\beta^2 a^2}{a^2(a^2 + \beta^2)} \cdot \frac{1}{n^2},$$

$$G = - \frac{\beta^4 \gamma^2}{a^2(\gamma^2 + \beta^2)^2} \cdot \frac{1}{n},$$

also $\frac{G}{F} = 0$.

Mittels der Reihen (2e) ergibt sich

$$k = - \frac{\beta a}{\alpha \sqrt{a^2 + \beta^2}},$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta^3 \gamma^2}{2 \alpha a (a^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn $a = 0$, wird $k = 0$ und $\frac{1}{c} = \infty$; sonst werden beide Werthe endlich seyn.

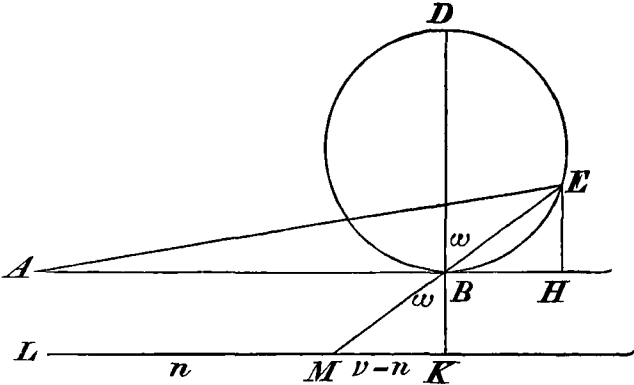
In der Nähe der Farbe stärkster Absorption läßt sich der Gang der Absorption und Brechung, wie ihn die Gleichungen (2d) und (2e) ergeben, durch die folgende Construction versinnlichen:

Man setze

$$\frac{mn^2 - a^2 - \beta^2}{\gamma^2 n} = \text{tang } \omega,$$

wobei ω von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ gehen wird, wenn n von 0 bis ∞ geht. Wie der Werth von ω aus dem gegebenen

Werthe von n durch Construction zu finden ist, wollen wir erst am Schlufs besprechen.



Man mache die Strecke

$$AB = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 n^2},$$

errichte in B das Loth BD von der Länge

$$BD = \frac{\beta^4}{\alpha^2 \gamma^2 n^3},$$

und construire einen Kreis, dessen Durchmesser BD ist. Man mache den Winkel $DBE = \omega$; E sey der Schnittpunkt seines zweiten Schenkels mit dem Kreise. Dann fälle man von E das Loth EH auf die Linie AB , so ist

$$AH = F \text{ und } EH = G.$$

$$AE = \sqrt{F^2 + G^2},$$

also

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2} (AE + AH),$$

$$\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{2} (AE - AH).$$

Wenn der Absorptionsstreifen schmal ist, so daß sich n nicht erheblich ändert, während man durch ihn hindurch geht, so kann man in den Werthen der Strecken AB und BD das n constant setzen und dafür den Werth ν nehmen

$$m v^2 = a^2 + \beta^2,$$

welcher etwa der Mitte des Absorptionsstreifen entspricht. Dann wird, während n wächst, der Punkt E den festen Kreis durchlaufen, auf dessen oberster Seite bei D wird die stärkste Absorption eintreten, dagegen vorher an der von A abgewendeten Seite die stärkste, nachher an der A zugewendeten Seite die schwächste Brechung.

Unter derselben Voraussetzung ergibt sich der Werth von $\tan \omega$ annähernd:

$$\tan \omega = \frac{(n - v)m}{2\gamma^2}.$$

Man verlängere DB über B hinaus, mache

$$BK = \frac{2\gamma^2}{m},$$

ziehe durch K die Parallele LK mit AB , mache $LK = v$ und trage nun die Werthe des n von L anfangend auf LK ab. Es sey z. B. $LM = n$, so ist annähernd der Winkel $MBK = \omega$, und der Punkt E wird gefunden, wenn man die Linie MB zieht und sie verlängert, bis sie zum zweiten Male den Kreis schneidet.

Es ist leicht ersichtlich, daß je kleiner BK ist, desto kleinere Veränderungen von n genügen werden, um den Punkt E gleiche Bogen des Kreises durchlaufen zu lassen, was schmalen Absorptionsstreifen entspricht. Die Stärke der Absorption hängt dagegen von dem Durchmesser BD ab.

Eine Methode zu genauerer Construction des Winkels ω läßt sich leicht finden für Fälle, wo die Absorptionsstreifen breiter sind. Die hier beschriebene Construction wird im Wesentlichen genügen, um den Gang der Erscheinung verfolgen zu lassen.

Dabei zeigt sich nun wieder, daß die Curve der Brechung sich fortdauernd continuirlich verändert und auch zwischen dem Maximum und Minimum durch den Absorptionsstreifen von jenem zu diesem absteigend hindurchläuft. Daß die Curve der Brechung einen solchen Gang habe, hat schon Hr. Christiansen aus seinen Versuchen geschlossen. (Poggend. Annal. Bd. 143.)

Neuere Beobachtungen, welche Hr. Dr. Wernicke kürzlich der hiesigen physikalischen Gesellschaft mitgetheilt hat, bestätigen dasselbe.

Die Ausdehnung der Theorie auf Medien mit einer größeren Anzahl von Absorptionsstreifen, würde so geschehen können, daß man statt Gleichung (1) setze:

$$a \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 \xi}{dy^2} + \sum [\beta_a^2 (x_a - \xi)],$$

wo der Index a sich auf die verschiedenen Arten Mitschwingender Massen bezieht. Für jede derselben würde dann eine andere Bewegungsgleichung bestehen, entsprechend (1 a):

$$m_a \cdot \frac{d^2 x_a}{dt^2} = \beta_a^2 (\xi - x_a) - a_a^2 x_a - \gamma_a^2 \cdot \frac{dx_a}{dt}.$$

Wenn wir für ebene Wellen Integrale von der Form der Gleichungen (2) annehmen, erhalten wir eine lineare Gleichung für die complexe Constante l^2 , deren reeller und imaginärer Theil wieder, wie oben, die Absorption k und Fortpflanzungsgeschwindigkeit c bestimmen. Die Werthe von k und c lassen sich also dann immer noch durch directe Auflösung der Gleichungen finden, aber der Gang ihrer Werthe bei wachsendem n wird allerdings beträchtlich complicirter, als in dem betrachteten einfachen Falle. Der Gang der Functionen liefse sich auch dann durch eine Construction, wie die oben gegebene, anschaulich machen, nur müßten über der Linie LK , auf der die Werthe von n abgetragen werden, mehrere Kreise, den verschiedenen Absorptionsstreifen entsprechend, von vielleicht verschiedener Größe, verschiedenem verticalen und horizontalen Abstände stehen. Die EH entsprechenden Strecken würden mit einander zu addiren seyn, und ebenso die BH entsprechenden unter einander und zu AB . Der Gang der Brechung würde im Ganzen derselbe werden, wie ihn Hr. Kundt in den Annalen Bd. 144, S. 131 beschrieben hat.