ZUR THEORIE DER FASTPERIODISCHEN FUNKTIONEN.

III.

Dirichletentwicklung analytischer Funktionen.

VON

HARALD BOHR

in KOPENHAGEN.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Es sei $z = re^{i\theta}$ eine komplexe Variable. Wir betrachten die Menge aller Potenzen $z^\lambda = r^\lambda e^{i\lambda\theta}$, wobei der Exponent λ die Menge aller reellen Zahlen durchläuft, und zwar betrachten wir sie auf der logarithmischen Fläche L, d. h. der unendlichblättrigen Riemannschen Fläche $0 < r < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$. Die Gesamtheit dieser kontinuierlich vielen Funktionen bildet ein Orthogonalsystem, in dem Sinne, dass bei festem r die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\lim_{\Theta\to\infty} \frac{1}{2\,\Theta}\int_{-\Theta}^{\Theta} z^{\lambda_1} . z^{-\lambda_2}\, d\theta = r^{\lambda_1-\lambda_2} \lim_{\Theta\to\infty} \frac{1}{2\,\Theta}\int_{-\Theta}^{\Theta} e^{i(\lambda_1-\lambda_2)\theta}\, d\theta$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda_1 = \lambda_2 \\ 0 \text{ für } \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

bestehen.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir das Problem behandeln: *Wie soll eine in dem unendlichblättrigen Kreisringe* $R_1 < r < R_2$, $-\infty < \theta < \infty$ *der Fläche* L *reguläre analytische Funktion* $f(z)$ *beschaffen sein, damit sie im ganzen Kreisringe* — also für alle Blätter zugleich, und nicht nur für jedes endlichblättrige Teilgebiet — *aus abzählbar vielen der Potenzen* z^λ *additiv aufgebaut werden kann, d. h. eine sinnvolle Darstellung der Form*

$$\sum a_n z^{\lambda_n}$$

zulasse. Dies ist nicht etwa so zu verstehen, dass die Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ als im Voraus gegebene Zahlen anzusehen sind; im Gegenteil, es wird der Funktion $f(z)$ überlassen, aus der Gesamtheit der kontinuierlich vielen Potenzen z^λ eine abzählbare Folge von zu ihr »gehörigen» Potenzen herauszugreifen.

Man kann unsere Fragestellung als eine natürliche Verallgemeinerung des klassischen Problems der Potenzreihenentwicklung auffassen, bei welchem statt des kontinuierlichen Systems z^λ nur das abzählbare System z^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ zugrunde liegt. In diesem letzten Falle, wo es sich um alle in Laurentreihen $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ entwickelbaren Funktionen handelt, lautet ja die Antwort, dass für die Entwickelbarkeit nicht nur notwendig sondern auch hinreichend ist, dass die Funktion $f(z)$ (wie die einzelnen Potenzen z^n des Grundsystems) auf der Riemannschen Fläche L periodisch in θ mit der Periode 2π ist, dass also $f(z)$ eine (beliebige) analytische Funktion des schlichten Kreisringes $R_1 < r < R_2$ ist.

Die vorliegende Abhandlung wird zeigen, dass bei unserem allgemeinen Problem, welches sich auf das kontinuierliche Grundsystem z^λ bezieht, eine fast ebenso einfache notwendige und hinreichende Bedingung vorhanden ist, welche dahin lautet, dass die Funktion $f(z)$ in bezug auf die Amplitude θ ein gewisses fastperiodisches Verhalten aufweisen soll.

Besonderes Interesse bietet der Fall $R_1 = 0$ (oder der gleichwertige Fall $R_2 = \infty$), der auf die Frage hinausläuft, welches Verhalten einer Funktion in einem logarithmischen Windungspunkt durch eine »irreguläre» Potenzreihe $\sum a_n z^{\lambda_n}$ bewältigt werden kann.

In der folgenden Darstellung wird es bequem sein, vermittels der Transformation $z=e^s$ von der Riemannschen Fläche L zu der schlichten Ebene $s=\sigma+it$ überzugehen. Unser Problem lautet dann: *welche in einem Streifen* $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$ *analytischen Funktionen* $f(s)$ *lassen sich in »Dirichletsche Reihen»*

$$\sum a_n e^{\lambda_n s}$$

entwickeln? Dem obigen Spezialfall $R_1=0$ (bezw. $R_2=\infty$) entspricht der Fall $\sigma_1=-\infty$ (bezw. $\sigma_2=+\infty$), in welchem also das Definitionsgebiet eine linke (bezw. rechte) Halbebene ist.

Unser Begriff einer Dirichletschen Reihe unterscheidet sich vom sonst üblichen dadurch, 1) dass wir nicht von einer beliebig hingeschriebenen Reihe ausgehen, sondern von einer Funktion, die die Reihe erzeugt, und 2) dass bei uns den Exponenten gar keine Bedingungen auferlegt sind, während man sonst nur Exponentenfolgen betrachtet, die sich nicht im Endlichen häufen.[1] Dieser zweite Punkt ist für unsere ganze Untersuchung von entscheidender Bedeutung; erst durch das Fallenlassen jedweder Einschränkung für die Exponentenfolgen entsteht die Möglichkeit einer einfachen und übersichtlichen Charakterisierung derjenigen Klasse von Funktionen, welche in Dirichletsche Reihen entwickelbar sind.

Die Theorie stellt sich als sinngemässe Übertragung der vom Verfasser in zwei Abhandlungen in den Acta mathematica (Bohr [3], [4]) entwickelten Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen dar, in welcher das Problem behandelt wurde, welche stetigen Funktionen $F(x)$ in »Fourierreihen»

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$$

entwickelt werden können.

Die ersten zwei Paragraphen haben nur vorbereitenden Charakter. In § 1 wird ein kurzes Résumé der Ergebnisse über fastperiodische Funktionen einer

---

[1] Zumeist betrachtet man sogar nur einseitig monotone Exponentenfolgen. Reihen, deren Exponenten sich sowohl gegen $+\infty$ als auch $-\infty$ häufen, die also in Streifen (und nicht Halbebenen) zu untersuchen sind, sind zuerst von Rogosinski [1] eingehender behandelt worden.

reellen Variablen gegeben, von denen wir vielfach Gebrauch machen werden; in § 2 werden einige bekannten funktionentheoretischen Tatsachen zusammengestellt, die das Fundament für das Spätere geben werden.

§ 1.

Résumé der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen.

Definition. *Eine für* $-\infty < x < \infty$ *stetige Funktion* $F(x) = U(x) + i\,V(x)$ *soll fastperiodisch heissen, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Länge* $l = l(\varepsilon) > 0$ *gibt derart, dass jedes Intervall* $x_1 < x < x_2$ *der Länge* $x_2 - x_1 = l$ *mindestens eine zu* ε *gehörige »Verschiebungszahl»* τ *enthält, d. h. eine Zahl* $\tau = \tau(\varepsilon)$, *welche für alle* x *der Ungleichung*

$$|F(x+\tau) - F(x)| \leqq \varepsilon$$

genügt.

Für die fastperiodischen Funktionen gelten die folgenden Sätze:

I. Jede fastperiodische Funktion ist beschränkt und gleichmässig stetig im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$.

II. Die Summe und das Produkt zweier fastperiodischen Funktionen sind wieder fastperiodisch, und auch der Quotient, falls der Nenner nicht beliebig nahe an 0 kommt.

Hierin ist enthalten, dass jedes »Exponentialpolynom»

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x} \quad (\lambda_n \text{ beliebig reell, } a_n \text{ beliebig komplex})$$

eine fastperiodische Funktion ist.

III. Die Grenzfunktion einer im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$ gleichmässig konvergenten Folge von fastperiodischen Funktionen ist wieder fastperiodisch.

Speziell ist also die Summe einer für $-\infty < x < \infty$ gleichmässig konvergenten Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

eine fastperiodische Funktion.

IV. Für jede fastperiodische Funktion $F(x)$ existiert der Mittelwert

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(x)\,dx$$

(übrigens gleichmässig in γ der Mittelwert

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_\gamma^{\gamma+T} F(x)\,dx\Bigg),$$

den wir mit $M\{F(x)\}$ bezeichnen.

Es existiert also auch (nach II) für beliebiges reelle λ der Mittelwert

$$M\{F(x)\,e^{-i\lambda x}\}=a(\lambda).$$

V. Bildet man bei einer gegebenen fastperiodischen Funktion $F(x)$ die Mittelwerte $a(\lambda)$, so gibt es (höchstens) abzählbar viele Exponenten λ, für welche diese Mittelwerte von o verschieden sind. Die so herausspringenden Exponenten λ denken wir uns (in irgendeiner Anordnung) mit $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, und die zugehörigen Mittelwerte $a(\Lambda_1), a(\Lambda_2), \ldots$ mit $A_1, A_2, \ldots$ bezeichnet. Die formal aufgestellte Reihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ nennen wir die Fourierreihe der Funktion $F(x)$ und schreiben

$$F(x)\sim\sum A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

Im Spezialfalle einer reinperiodischen Funktion stimmt die so gebildete Fourierreihe mit der gewöhnlichen Fourierreihe überein.

VI. Jede für $-\infty<x<\infty$ gleichmässig konvergente Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

ist eine Fourrierreihe in unserem Sinne, nämlich die Fourierreihe ihrer Summe. Wie auch die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ beschaffen sind, können sie schon die Exponenten einer Fourierreihe sein.

VII. Fundamentalsatz. Für die Fourierkoeffizienten A_n der fastperiodischen Funktion $F(x)$ besteht die »Parsevalsche Gleichung»

$$\sum|A_n|^2=M\{|F(x)|^2\}.$$

Diese Gleichung ist damit gleichbedeutend, dass die Abschnitte der Fourierreihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ gegen die Funktion $F(x)$ im Mittel konvergieren:

$$\lim_{N\to\infty} M\left\{\left|F(x)-\sum_1^N A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\}=0.$$

VIII. Eine beliebige Fourrierreihe braucht nicht im gewöhnlichen Sinne zu konvergieren. Bei gewissen Typen ist aber Konvergenz immer vorhanden. So konvergieren (vgl. Bohr [5]) solche Fourierreihen, deren Exponenten linear unabhängig sind, oder deren Koeffizienten alle positiv sind; in diesen beiden Fällen tritt sogar absolute (also umsomehr im ganzen Intervalle gleichmässige) Konvergenz ein.

IX. Eindeutigkeitssatz. Aus dem Fundamentalsatz folgt leicht, dass eine fastperiodische Funktion durch ihre Fourierreihe eindeutig bestimmt ist, dass also zu zwei verschiedenen Funktionen zwei verschiedene Fourierreihen gehören.

Für das Operieren mit Fourierreihen gelten einfache Regeln:

X. Die Fourierreihe einer Summe $F_1(x)+F_2(x)$ entsteht durch formale Addition der Fourierreihen von $F_1(x)$ und $F_2(x)$.

XI. Ähnliches gilt für das Produkt: Aus $F_1(x)\sim\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ und $F_2(x)\sim\sum B_n e^{i\mathrm{M}_n x}$ folgt

$$F_1(x)\,F_2(x)\sim\sum C_n e^{i\mathrm{N}_n x},$$

wo der Exponent N_n die Zahlen der Form $\Lambda_p+\mathrm{M}_q$ durchläuft, und der entsprechende Koeffizient C_n durch die (absolut konvergente) Summe

$$C_n=\sum_{\Lambda_p+\mathrm{M}_q=\mathrm{N}_n} A_p B_q$$

gegeben ist.

XII. Die Fourierreihe der Grenzfunktion $F(x)$ einer gleichmässig konvergenten Folge von fastperiodischen Funktionen $F_n(x)$ entsteht durch formalen Grenzübergang aus den Fourierreihen dieser Funktionen, d. h. es gilt bei jedem λ die Limesgleichung

$$a(\lambda)=M\{F(x)\,e^{-i\lambda x}\}=\lim_{n\to\infty} M\{F_n(x)\,e^{-i\lambda x}\}.$$

XIII. Wenn das unbestimmte Integral $\Phi(x) = \int F(x)\,dx$ einer fastperiodischen Funktion $F(x)$ für alle x beschränkt ist (wozu notwendig, aber noch lange nicht hinreichend ist, dass in der Fourierreihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ von $F(x)$ kein konstantes Glied vorkommt), ist $\Phi(x)$ auch fastperiodisch, und die Fourierentwicklung von $\Phi(x)$ wird durch formale Integration der Fourierreihe von $F(x)$ erhalten:

$$\Phi(x) \sim C + \sum \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}.$$

In XIII ist enthalten:

XIV. Falls eine fastperiodische Funktion $F(x)$ differentiierbar ist, und ihr Differentialquotient $F'(x)$ fastperiodisch ausfällt, dann entsteht die Fourierreihe von $F'(x)$ durch gliedweise Differentiation der Fourierreihe $\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$ von $F(x)$, also

$$F'(x) \sim \sum i\Lambda_n A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

Die Fourierreihe einer beliebigen fastperiodischen Funktion liefert nicht durch ihre Abschnitte Exponentialpolynome, die gegen die Funktion gleichmässig konvergieren. Es ist jedoch für jede fastperiodische Funktion eine gleichmässige Annäherung durch Exponentialpolynome möglich — ebenso wie nach WEIERSTRASS jede rein periodische Funktion durch endliche Summen $\sum a_n e^{inkx}$ gleichmässig angenähert werden kann.

XV. Approximationssatz. Damit eine stetige Funktion $F(x)$ fastperiodisch ist, ist nicht nur (vgl. III) hinreichend, sondern auch notwendig, *dass sie sich durch Exponentialpolynome* $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ *gleichmässig im ganzen Intervalle* $-\infty < x < \infty$ *approximieren lässt.* Hierbei können bei jeder Funktion $F(x)$ die approximierenden Exponentialpolynome so gewählt werden, *dass die in ihnen auftretenden Exponenten* λ_n *nur der Folge der Fourierexponenten* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ *der Funktion entnommen sind.*[1]

[1] Der vom Verfasser gegebene Beweis dieses Satzes (BOHR [4]) beruht auf dem Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen $F(x)$ mit den reinperiodischen (oder grenzperiodischen) Funktionen $G(x_1, x_2, \ldots)$ von unendlich vielen Variablen und einer Summierung der »Fourierreihen« dieser letzteren Funktionen $G(x_1, x_2, \ldots)$ durch die Fejérsche Summationsmethode (auf mehrfache Reihen ausgedehnt). Wie BOCHNER [1] in einer vorläufigen Mitteilung angegeben hat, lässt sich aber zum Beweise des Approximationssatzes der Übergang zu Funktionen mehrerer Variablen gänzlich vermeiden, indem ein Summationsverfahren — entsprechend dem Fejérschen im Falle rein-

Für den Aufbau der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Variablen benötigen wir noch (vgl. [4]) eine kleine Verallgemeinerung des vorausgehenden Satzes, welche eine Aussage über gleichzeitige Approximation einer Menge von fastperiodischen Funktionen enthält.

XVI. Es sei $\boldsymbol{M}$ eine unendliche Menge von fastperiodischen Funktionen $F(x) \sim \sum A_n^{(F)} e^{i\Lambda_n x}$, welche alle dieselben Exponenten $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ haben und ausserdem den Bedingungen genügen:

1. Die Funktionen der Menge sind gleichartig gleichmässig stetig, d. h. zu jedem η gibt es ein δ, so dass für jede Funktion der Menge und jedes $|h| < \delta$ die Ungleichung

$$|F(x+h) - F(x)| < \eta \qquad (-\infty < x < \infty)$$

besteht.

2. Die Funktionen der Menge sind gleichartig fastperiodisch, d. h. zu jedem ε gibt es eine Länge $l(\varepsilon)$, so dass jedes Intervall dieser Länge mindestens eine allen Funktionen gemeinsame Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ enthält.

3. Die (konvergenten) Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(F)}|^2$, wo F alle Funktionen der Menge durchläuft, haben eine Majorante, d. h. bei jedem festen n haben die absoluten Beträge $|A_n^{(F)}|$ eine endliche obere Schranke $\boldsymbol{A}_n$, und die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_n^2$ ist konvergent.

Dann gibt es zu jedem δ ein N und dazugehörige N reelle Faktoren $r_1, r_2, \ldots, r_N$ derart, dass für jede Funktion der Menge $\boldsymbol{M}$ die Ungleichung

$$\left| F(x) - \sum_{n=1}^{N} r_n A_n^{(F)} e^{i\Lambda_n x} \right| < \delta$$

im ganzen Intervalle $-\infty < x < \infty$ besteht.

---

periodischer Funktionen — direkt auf die Fourierreihe der gegebenen fastperiodischen Funktion $F(x)$ angewendet wird, von dem unschwer bewiesen werden kann, dass es zu gleichmässig konvergierenden Exponentialpolynomen führt. Beim Nachweis, dass dieses Summationsverfahren tatsächlich zur Ausgangsfunktion hinführt, wird der Fundamentalsatz (eigentlich nur der Eindeutigkeitssatz) wesentlich verwendet, so dass dieses Verfahren nicht wie bei den reinperiodischen Funktionen den Beweis der Parsevalschen Gleichung mitliefert.

§ 2.

Funktionentheoretische Hilfsmittel.

Ausser solchen elementaren Tatsachen wie dem Cauchyschen Integralsatze benötigen wir im Folgenden nur einige allgemeinen Theoreme aus der Funktionentheorie, die wir in diesem Paragraphen anführen. Aus den Theoremen selbst ziehen wir sogleich in der Gestalt einiger Sätze diejenigen Folgerungen, die wir direkt anwenden werden.

Phragmén-Lindelöfscher Satz. Es sei $\sigma_1<\sigma_2$ und $\varphi(s)=\varphi(\sigma+it)$ im Streifen $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$ regulär und beschränkt. Ferner sei auf den beiden Begrenzungsgeraden $\sigma=\sigma_1$ und $\sigma=\sigma_2$

$$|\varphi(s)|\leqq K.$$

Dann gilt diese Ungleichung (mit demselben K) in allen Punkten des Streifens $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$.

Diesen Satz hat DOETSCH [1] folgendermassen verallgemeinert:

Dreigeradensatz. Es sei $\sigma_1<\sigma_2$ und $\varphi(s)$ im Streifen $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$ regulär und beschränkt. Ferner bezeichne $L(\sigma)$ die obere Grenze von $|\varphi(s)|$ auf der Geraden $\Re(s)=\sigma$. Dann gilt für $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$ die Ungleichung

$$L(\sigma)\leqq L(\sigma_1)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}}\,.\,L(\sigma_2)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}};$$

mit anderen Worten, $\log L(\sigma)$ ist eine konvexe Funktion von σ.

Satz A. *Für ein Exponentialpolynom*

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{N}a_n e^{\lambda_n s}$$

mit lauter negativen Exponenten λ_n ist die obere Grenze $L(\sigma)$ von $|\varphi(s)|$ auf der Geraden $\Re(s)=\sigma$ eine im ganzen Intervalle $-\infty<\sigma<\infty$ monoton abnehmende Funktion von σ.

In der Tat strebt $L(\sigma)$ gegen 0, also $\log L(\sigma)$ gegen $-\infty$ für $\sigma\to+\infty$, und eine konvexe Funktion, die diese Bedingung erfüllt, muss offenbar monoton sein.

Satz B. *Gegeben seien* $\alpha_1' < \alpha_1 < \sigma_0 < \beta_1 < \beta_1'$, $K > 0$ *und* $(K >) \varepsilon > 0$. *Dann gibt es dazu ein* $\delta > 0$, *so dass jede für* $\alpha_1' \leqq \sigma \leqq \beta_1'$ *reguläre Funktion, welche den beiden Bedingungen*

$$|\varphi(s)| \leqq K \qquad \text{im grossen Streifen } \alpha_1' \leqq \sigma \leqq \beta_1'$$

und

$$|\varphi(s)| \leqq \delta \qquad \text{auf der Geraden } \sigma = \sigma_0$$

genügt, ebenfalls die Ungleichung

$$|\varphi(s)| \leqq \varepsilon \qquad \text{im kleineren Streifen } \alpha_1 \leqq \sigma \leqq \beta_1$$

befriedigt.

Wegen der Konvexität von $L(\sigma)$ genügt es in der Tat (siehe Fig. 1.) das δ so klein zu wählen, dass der Punkt $(\sigma_0, \log \delta)$ tiefer liegt als die Schnittpunkte der Geraden $\sigma = \sigma_0$ mit den beiden durch die Punkte $(\alpha_1', \log K)$ und $(\alpha_1, \log \varepsilon)$ bezw. $(\beta_1', \log K)$ und $(\beta_1, \log \varepsilon)$ hindurchgehenden Geraden.

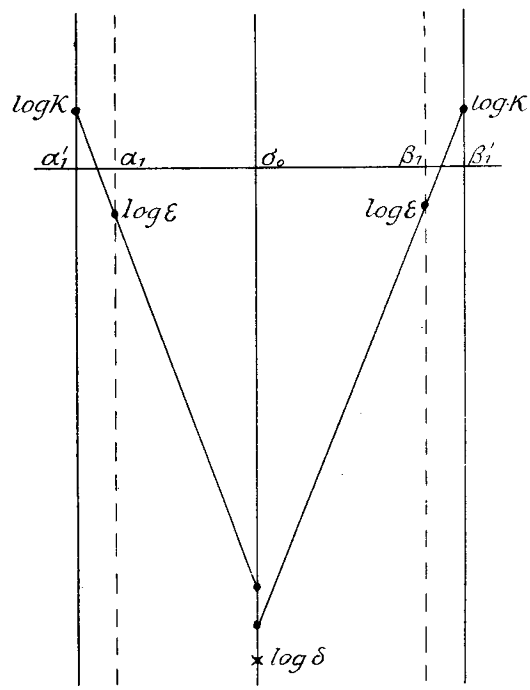

Fig. 1.

M o n t e l s c h e r A u s w a h l s a t z.[1] Es seien C_1 und C_2 zwei einfache geschlossene Kurven, von denen C_2 im Innern von C_1 verläuft. (Es genügt für unsere Zwecke, wenn C_1 und C_2 beides Rechtecke sind.) Dann lässt sich aus jeder Folge von Funktionen, welche im Innern von C_1 regulär und gleichartig beschränkt sind, eine Teilfolge auswählen, die im Innern von C_2 gleichmässig konvergiert.

Satz C. *Es sei* $\varphi(s)$ *eine in einem Streifen* $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ *reguläre und beschränkte Funktion, die auf einer Geraden* $\sigma = \sigma_0$ *im Innern des Streifens den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *Der Wert* 0 *gehört zur abgeschlossenen Hülle der Wertmenge von* $\varphi(s)$ *auf der Geraden* $\sigma = \sigma_0$, *d. h. es gibt eine Zahlenfolge* $t_1, t_2, \ldots$, *so dass* $\lim_{n \to \infty} \varphi(\sigma_0 + i t_n) = 0$ *ist.*

[1] Vgl. z. B. MONTEL [1], S. 21.

2. *Es gibt eine positive Grösse d und eine Länge l, so dass in jedem Intervall der Länge l auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ mindestens ein Punkt $s=\sigma_0+it$ mit $|\varphi(s)|>d$ existiert.*

Dann nimmt die Funktion $\varphi(s)$ den Wert 0 in jedem Streifen $\sigma_0-\delta<\sigma<\sigma_0+\delta$ an.

Wir brauchen nur den Auswahlsatz auf die Funktionenfolge $\varphi_n(s)=\varphi(s+it_n)$ in den zwei Rechtecken

$$C_1: \qquad \alpha_1<\sigma<\beta_1, \qquad -l<t<l$$

und

$$C_2: \qquad (\alpha_1<)\,\sigma_0-\delta<\sigma<\sigma_0+\delta\,(<\beta_1), \qquad -\frac{l}{2}<t<\frac{l}{2}$$

anzuwenden. Er lehrt die Existenz einer in C_2 gleichmässig konvergierenden Teilfolge $\varphi_{n_1}(s), \varphi_{n_2}(s), \ldots$. Die Limesfunktion $\psi(s)$ dieser Folge hat im Mittelpunkte $s=\sigma_0$ des Rechteckes C_2 den Wert 0, kann aber nicht identisch 0 sein, weil jede Funktion $\varphi_n(s)$ in mindestens einem Punkte des Rechteckes C_2 absolut genommen $>d$ ist. Hieraus folgt nach einer klassischen Schlussweise (Satz von Rouché), dass für hinreichend grosses p die Funktion $\varphi_{n_p}(s)$ in C_2 mindestens eine Nullstelle hat. Also hat $\varphi(s)$ eine Nullstelle im Rechtecke $\sigma_0-\delta<\sigma<\sigma_0+\delta$, $-\frac{l}{2}+t_{n_p}<t<\frac{l}{2}+t_{n_p}$.

Schwarzsches Lemma. Wenn $w=\varphi(s)$ für $|s|<1$ regulär ist, dem Punkte $s=0$ der Punkt $w=0$ entspricht, und für $|s|<1$ auch $|w|<1$ ist, dann gilt im ganzen Kreise $|s|<1$ sogar die schärfere Ungleichung

$$|w|=|\varphi(s)|\leqq|s|.$$

Es ist für unsere Zwecke vorteilhaft, dieses Lemma $\left(\text{durch gleichzeitige Abbildung der Einheitskreise sowohl der } s\text{-Ebene als auch der } w\text{-Ebene auf Halbebenen durch dieselbe Transformation } z=\frac{z'-1}{z'+1}\right)$ folgendermassen auszusprechen:

Wenn $w=u+iv=\varphi(s)=\varphi(\sigma+it)$ für $\sigma>0$ regulär ist, dem Punkte $s=1$ der Punkt $w=1$ entspricht, und für $\sigma>0$ auch $u>0$ ist, dann gilt in der ganzen Halbebene $\sigma>0$ sogar die schärfere Ungleichung

$$\left|\frac{w-1}{w+1}\right|\leqq\left|\frac{s-1}{s+1}\right|.$$

Speziell folgern wir, *dass jeder Punkt* $s=\sigma>1$ *auf der reellen Achse in einen Punkt* $w=u+iv$ *mit* $u\leqq\sigma$ *übergeht.*

Satz D. *Gegeben seien die Zahlen* σ_1, $\sigma_2>\sigma_1$, $k>0$ *und* $c>0$. *Es sei* $f(s)$ *für* $\sigma>\sigma_1$ *regulär und genüge den beiden Ungleichungen*

$$|f(s)|>ce^{k\sigma_1} \qquad \textit{in der Halbebene } \sigma>\sigma_1$$

und

$$|f(s)|\leqq ce^{k\sigma_2} \qquad \textit{auf der Geraden } \sigma=\sigma_2.$$

Dann gilt in der ganzen (kleineren) Halbebene $\sigma>\sigma_2$ *die Ungleichung*[1]

$$|f(s)|\leqq ce^{k\sigma}.$$

Durch triviale (ganze lineare) Transformationen der unabhängigen und abhängigen Variablen können wir offenbar den Satz auf den Fall $\sigma_1=0$, $\sigma_2=1$, $c=1$ (und beliebiges $k>0$) zurückführen. Es lauten dann die Voraussetzungen

$$(1) \qquad |f(s)|>1 \qquad \text{in } \sigma>0,$$

$$(2) \qquad |f(s)|\leqq e^k \qquad \text{auf } \sigma=1,$$

und behauptet wird:

$$(3) \qquad |f(s)|\leqq e^{k\sigma} \qquad \text{in } \sigma>1.$$

Wir bezeichnen einen in der Halbebene $\sigma>0$ regulären Zweig der Funktion $\frac{1}{k}\log f(s)$ mit $F(s)$. Wegen (1) und (2) bestehen die Ungleichungen

$$(1^a) \qquad \Re(F(s))>0 \qquad \text{in } \sigma>0,$$

$$(2^a) \qquad \Re(F(s))\leqq 1 \qquad \text{auf } \sigma=1;$$

die Behauptung lautet

$$(3^a) \qquad \Re(F(s))\leqq\sigma \qquad \text{in } \sigma>1.$$

Weil auf den rechten Seiten von (1^a), (2^a), (3^a) die Ordinate t nicht vorkommt, genügt es, aus Parallelverschiebungsgründen, die Behauptung (3^a) für reelle $s=\sigma>1$ zu beweisen. Wir bezeichnen den Bildpunkt von $s=1$ mit

[1] Die Abschätzung ist die »bestmögliche», wie das Beispiel $f(s)=ce^{ks}$ zeigt.

$$F(1)=w_1=u_1+iv_1,$$

wo die positive Zahl u_1 nach Voraussetzung $\leqq 1$ ist, und wenden das obige Lemma auf die Funktion

$$\varphi(s)=\frac{F(s)-iv_1}{u_1}$$

an, welche den beiden Voraussetzungen $\Re(\varphi(s))>0$ für $\sigma>0$ und $\varphi(1)=1$ genügt. Unsere Folgerung aus dem Lemma $(u\leqq\sigma)$ ergibt für ein beliebiges reelles $s=\sigma>1$

$$\Re(\varphi(s))=\frac{\Re(F(s))}{u_1}\leqq\sigma,$$

also, wegen $u_1\leqq 1$,

$$\Re(F(s))\leqq\sigma,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Wir sprechen jetzt einen Satz von IVERSEN ([1], S. 13) aus dem Ideenkreis des **Picardschen Satzes** aus, auf den wir uns späterhin bei der Übertragung letztgenannten Satzes auf unsere Funktionenklasse stützen werden, und den wir für unsere Zwecke spezialisiert haben.

Satz E. *Es sei $f(s)$ für $\sigma\geqq\sigma_1$ regulär, und auf $\sigma=\sigma_1$ beschränkt, und es bezeichne H die abgeschlossene Hülle der Wertmenge von $f(s)$ auf der Geraden $\sigma=\sigma_1$. Ferner liege die Wertmenge von $w=f(s)$ in jeder Halbebene $\sigma>\sigma_2$ $(>\sigma_1)$ in der w-Ebene überall dicht. Dann nimmt $f(s)$ in der Halbebene $\sigma>\sigma_1$ alle Werte, die nicht zur Menge H gehören, bis auf höchstens einen an.*

Schliesslich leiten wir mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes einen einfachen »Trennungssatz» ab, welcher die Aussage des **Laurentschen Satzes** von einem Kreisringe auf einen Streifen überträgt.

Zunächst werden wir aber einige **abkürzenden Bezeichnungen** einführen, von denen wir nicht nur im kommenden Trennungssatz, sondern in der ganzen folgenden Abhandlung einen ausgedehnten Gebrauch machen werden.

Es bezeichne überall im Folgenden α und β endliche oder unendliche reelle Grössen, und zwar sei $-\infty\leqq\alpha<\beta\leqq+\infty$.

1. Statt »im Streifen $\alpha<\sigma<\beta$ der s-Ebene» wollen wir einfach »in (α, β)» schreiben.

2. Statt »in jedem festen Teilstreifen $(\alpha<)\,\alpha_1<\sigma<\beta_1\,(<\beta)$ des Streifens $\alpha<\sigma<\beta$» wollen wir schreiben »in $[\alpha, \beta]$».

3. Wir werden auch gemischte Klammern gebrauchen. Wir werden schreiben »in $(\alpha, \beta]$» bezw. »in $[\alpha, \beta)$» in der Bedeutung von »in jedem einseitig beschnittenen Teilstreifen $\alpha<\sigma<\beta_1\,(<\beta)$» bezw. »in jedem Teilstreifen $(\alpha<)\,\alpha_1<\sigma<\beta$».

Beispiel. Dass $f(s)$ in (α, β) beschränkt ist, bedeutet, dass es eine Konstante K gibt, so dass die Ungleichung $|f(s)|<K$ für alle s des Streifens $\alpha<\sigma<\beta$ besteht; das $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist, bedeutet, dass $|f(s)|<K=K(\alpha_1, \beta_1)$ in jedem Teilstreifen $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ ist; und dass $f(s)$ in $(\alpha, \beta]$ beschränkt ist, soll heissen dass $|f(s)|<K=K(\beta_1)$ in jedem Teilstreifen $\alpha<\sigma<\beta_1\,(<\beta)$ ist.

Satz F. *Es sei $f(s)$ eine im Streifen $\alpha<\sigma<\beta$ reguläre Funktion, die in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist, und deren unbestimmtes Integral $F(s)$ ebenfalls in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist.*[1] *Dann lässt sich $f(s)$ in (α, β) in zwei Funktionen spalten,*

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s),$$

von denen die eine Funktion $f_1(s)$ in der ganzen rechten Halbebene $\sigma>\alpha$ regulär, in $[\alpha, +\infty)$ beschränkt ist, und für $\sigma\to\infty$ gleichmässig in t gegen 0 strebt, während die andere Funktion $f_2(s)$ das analoge Verhalten nach links (für $\sigma<\beta$) aufweist. Und die Zerlegung in zwei Summanden von den angegebenen Eigenschaften ist nur auf eine einzige Weise möglich.

1. Dass eine solche Zerlegung auf höchstens eine Weise möglich sein wird, liegt auf der Hand. Denn würde es zwei Zerlegungen

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s)=g_1(s)+g_2(s)$$

der erwähnten Art geben, so wäre die Funktion

$$\varphi(s)=f_1(s)-g_1(s)=g_2(s)-f_2(s)$$

eine überall reguläre und durchweg beschränkte Funktion, also eine Konstante, die wegen des Grenzverhaltens $\lim\limits_{\sigma\to\pm\infty}\varphi(s)=0$ gleich 0 ausfiele.

2. Um nunmehr eine Zerlegung tatsächlich durchzuführen, betrachten wir

[1] Es ist natürlich gleichgültig, welches unbestimmte Integral man herausgreift; denn aus der Beschränktheit des einen folgt die aller anderen. Wir bemerken ferner, dass für die Beschränktheit von $F(s)$ schon hinreicht, dass $F(s)$ auf einer einzigen Geraden $\sigma=\sigma_0$ beschränkt ist, wie aus dem Cauchyschen Satze sofort ersichtlich ist.

zunächst einen Teilstreifen $\alpha_1<\sigma<\beta_1$; nach dem Cauchyschen Satze gilt für jeden inneren Punkt $s=\sigma+it$ dieses letzten Streifens die Darstellung

$$2\pi i f(s)=\int_{\alpha_1+iT}^{\alpha_1-iT}+\int_{\alpha_1-iT}^{\beta_1-iT}+\int_{\beta_1-iT}^{\beta_1+iT}+\int_{\beta_1+iT}^{\alpha_1+iT}\frac{F(z)}{(z-s)^2}dz \qquad (T>|t|)$$

also für $T\to\infty$

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1+i\infty}^{\alpha_1-i\infty}\frac{F(z)}{(z-s)^2}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty}\frac{F(z)}{(z-s)^2}dz=f_1(s)+f_2(s),$$

wo die beiden Integrale wegen der Beschränktheit von $F(z)$ absolut konvergieren.[1] Die durch das erste Integral dargestellte Funktion $f_1(s)$ existiert offenbar über den Streifen $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ hinaus in der ganzen Halbebene $\sigma>\alpha_1$, ist in $[\alpha_1,+\infty)$ beschränkt, und strebt für $\sigma\to\infty$ gleichmässig gegen 0. Die durch das zweite Integral dargestellte Funktion $f_2(s)$ weist das analoge Verhalten nach links auf. Jetzt lassen wir $\alpha_1\to\alpha$. Dadurch wird die Definitionshalbebene von $f_1(s)$ erweitert, ohne dass sich der Wert dieser Funktion in einem einmal erreichten Punkt dabei änderte (denn $f(s)$ und $f_2(s)$ sind von α_1 unabhängig, und $f_1(s)=f(s)-f_2(s)$). Verfährt man mit der Funktion $f_2(s)$ analog $(\beta_1\to\beta)$, so erhält man die in (α,β) gültige Trennung

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s).$$

§ 3.

Definition der Fastperiodizität und einige direkten Folgerungen.

Wie immer bedeuten α und β endliche oder unendliche Zahlen, und zwar sei $-\infty\leqq\alpha<\beta\leqq+\infty$.

Definition. *Eine im Streifen $\alpha<\sigma<\beta$ analytische (reguläre) Funktion $f(s)=f(\sigma+it)$ soll »fastperiodisch in (α,β)« heissen, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Länge*

[1] Hätten wir mit der Funktion $f(s)$ selbst, statt mit dem Integral $F(s)$ operiert, also von der Darstellung

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-s}dz$$

Ausgang genommen, dann würde der Grenzübergang $T\to\infty$ nicht auf konvergente Integrale führen.

$l(\varepsilon)$ derart gibt, dass jedes auf der imaginären Achse gelegene Intervall $t_1 < t < t_2$ der Länge $l(\varepsilon)$ mindestens eine zu ε gehörige »Verschiebungszahl» $\tau = \tau(\varepsilon)$ enthält, d. h. eine Zahl τ, welche für alle s im ganzen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ die Ungleichung

$$|f(s+i\tau) - f(s)| \leqq \varepsilon$$

erfüllt.

Es ist klar, dass jede in (α, β) reinperiodische Funktion $f(s)$ mit einer imaginären Periode ip daselbst fastperiodisch ist. Speziell ist also jede »Schwingung» $ae^{\lambda s}$ (λ beliebig reell, a beliebig komplex) fastperiodisch in $(-\infty, \infty)$.

In Anschluss an die auf S. 249—250 eingeführten Abkürzungen soll eine in $\alpha < \sigma < \beta$ reguläre Funktion *»fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$»* heissen, falls sie in jedem Teilstreifen (α_1, β_1) fastperiodisch ist.

Satz 1. *Jede in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ ist in $[\alpha, \beta]$ beschränkt, d. h. in jedem Teilstreifen $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ ist*

$$|f(s)| \leqq K = K(\alpha_1, \beta_1).$$

Beweis. Man erhält eine Schranke $K = K(\alpha_1, \beta_1)$ folgendermassen: Nach Voraussetzung gibt es eine Länge $l_1 = l_1(\alpha_1, \beta_1, 1)$ derart, dass jedes Intervall $t_1 < t < t_2$ dieser Länge l_1 eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(1)$ enthält, für welche also die Ungleichung

$$|f(s+i\tau) - f(s)| \leqq 1 \qquad \text{in } \alpha_1 < \sigma < \beta_1$$

erfüllt ist. Es bezeichne G die (offenbar endliche) obere Grenze von $|f(s)|$ im Rechteck $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$, $0 < t < l_1$. Die Konstante $G + 1$ ist dann ein $K(\alpha_1, \beta_1)$. Zu jedem beliebigen Punkte $s_0 = \sigma_0 + it_0$ des Streifens $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ lässt sich nämlich eine Verschiebungszahl $\tau = \tau(1) = \tau(1; s_0)$ so finden, dass der verschobene Punkt $s_0 + i\tau$ ins obige Rechteck fällt — wir brauchen nur die Verschiebungszahl τ so zu wählen, dass sie dem Intervalle $-t_0 < t < -t_0 + l_1$ der Länge l_1 angehört — woraus dann folgt

$$|f(s_0)| \leqq |f(s_0 + i\tau)| + 1 \leqq G + 1.$$

Corollar. Aus Satz 1 folgt, dass eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ *gleichmässig stetig* ist; denn aus der Beschränktheit von $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ folgt nach dem Cauchyschen Satze die Beschränktheit der Ableitung $f'(s)$ in $[\alpha, \beta]$. (Später werden wir sehen, dass die Ableitung sogar fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$ ist.)

Aus der obigen Definition der Fastperiodizität ist unmittelbar ersichtlich, dass eine in einem Streifen fastperiodische Funktion $f(s)$ auf jeder festen Geraden $\sigma=\sigma_0$ des Streifens eine fastperiodische Funktion der Ordinate t ist (vgl. Definition § 1). Bei der Übertragung der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Variablen auf Funktionen einer komplexen Variablen wird uns der folgende Satz sehr nützlich sein, der es in mehreren Fällen gestattet, fertige Sätze unmittelbar herüberzunehmen.

Satz 2. *Von einer in $\alpha<\sigma<\beta$ analytischen Funktion $f(s)$ sei, was Fastperiodizität anlangt, nur bekannt, dass sie auf einer Geraden $\sigma=\sigma_0$ im Streifen fastperiodisch in t ist. Wenn sie ausserdem in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist, dann ist sie eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion von s.*

Beweis. Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich sofort aus Satz B, § 2. Es sei $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ ein beliebiger Teilstreifen, welcher die gegebene Gerade $\sigma=\sigma_0$ im Innern enthält, und $\alpha_1'<\sigma<\beta_1'$ ein etwas grösserer Teilstreifen. Ferner bezeichne k die obere Grenze von $|f(s)|$ in diesem letzten Streifen $\alpha_1'\leqq\sigma\leqq\beta_1'$. Zu den Zahlen $\alpha_1'<\alpha_1<\sigma_0<\beta_1<\beta_1'$, $K=2k$ und einem gegebenen $\varepsilon\,(<K)$ bestimmen wir das δ im Sinne von Satz B, und werden zeigen, dass jede zu diesem δ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(t)=f(\sigma_0+it)$ zugleich eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $f(s)$ in (α_1, β_1) ist (woraus dann die Fastperiodizität von $f(s)$ in (α_1, β_1) folgt). In der Tat genügt bei festgehaltenem $\tau=\tau(\delta)$ die Differenzfunktion $\varphi(s)=f(s+i\tau)-f(s)$ den Voraussetzungen des Satzes B, nämlich

$$|\varphi(s)|\leqq K \qquad \text{in } \alpha_1'\leqq\sigma\leqq\beta_1'$$

und

$$|\varphi(s)|\leqq\delta \qquad \text{auf } \sigma=\sigma_0,$$

und der Satz ergibt also

$$|\varphi(s)|=|f(s+i\tau)-f(s)|\leqq\varepsilon \qquad \text{in } \alpha_1<\sigma<\beta_1.$$

Bemerkung. Wenn $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch ist, kann es natürlich grössere Streifen $[\alpha', \beta']$ mit $\alpha'\leqq\alpha<\beta\leqq\beta'$ geben, in denen $f(s)$ noch fastperiodisch ist. Aus den Sätzen 1 und 2 folgt nun, *dass es unter diesen Streifen $[\alpha', \beta']$ einen grössten (alle anderen umfassenden) geben muss, und dass dieser Streifen mit dem grössten Streifen $[\alpha^*, \beta^*]$ zusammenfällt, welcher $[\alpha, \beta]$ enthält, und für den $f(s)$ in $[\alpha^*, \beta^*]$*

noch regulär und beschränkt bleibt. Wir werden diesen Streifen $[\alpha^*, \beta^*]$ einen *Maximalstreifen* der fastperiodischen Funktion $f(s)$ nennen.[1]

Mit Hilfe des Satzes 2 ergeben sich mit Leichtigkeit die zwei folgenden Sätze aus den entsprechenden Sätzen in § 1.

Satz 3. *Die Summe und das Produkt zweier in* $[\alpha, \beta]$ *fastperiodischen Funktionen* $f(s)$ *und* $g(s)$ *sind ebenfalls fastperiodisch in* $[\alpha, \beta]$.

Beweis. Auf irgendeiner festgehaltenen Geraden des Streifens sind (nach II, § 1) die Summe und das Produkt fastperiodisch in der Ordinate t; also sind $f(s)+g(s)$ und $f(s).g(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$, weil sie daselbst beschränkt sind.

Corollar. *Jedes Exponentialpolynom (d. h. jede endliche Summe von Schwingungen)*

$$f(s)=\sum_{1}^{N} a_n e^{\lambda_n s}$$

ist fastperiodisch in $[-\infty, \infty]$. In dem speziellen Falle, wo die Exponenten λ_n alle negativ sind, ist das Exponentialpolynom $f(s)$ nicht nur in $[-\infty, \infty]$, sondern sogar in $[-\infty, \infty)$ fastperiodisch, was sich sofort daraus ergibt, dass $f(s)$ für $\sigma \to +\infty$ gleichmässig in t gegen 0 strebt.

Satz 4. *Wenn das unbestimmte Integral* $\varphi(s)=\int f(s)\,ds$ *einer in* $[\alpha, \beta]$ *fastperiodischen Funktion* $f(s)$ *in* $[\alpha, \beta]$ *beschränkt ist* (wozu nach dem Cauchyschen Satze schon Beschränktheit auf einer Geraden $\sigma=\sigma_0$ im Streifen genügt), *dann ist* $\varphi(s)$ *auch fastperiodisch in* $[\alpha, \beta]$.

Beweis. In der Tat ist nach XIII, § 1 die Funktion $\varphi(s)$ auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ fastperiodisch, also auch in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch.

Bei den jetzt kommenden Sätzen werden Satz 2 und die Sätze aus § 1 nicht mehr herangezogen, sondern es wird direkt an die Definition der Fastperiodizität angeknüpft.

Satz 5. *Die Grenzfunktion* $f(s)$ *einer in* (α, β) *gleichmässig konvergenten Folge in* (α, β) *fastperiodischer Funktionen* $f_n(s)$ *ist wieder in* (α, β) *fastperiodisch.*

---

[1] Natürlich kann es zu einer Funktion $f(s)$ mehrere Maximalstreifen geben. So hat die reinperiodische Funktion $f(s)=\frac{1}{e^s-1}$ die beiden Maximalstreifen $[-\infty, 0]$ und $[0, \infty]$.

Beweis. Falls N so gross gewählt ist, dass $|f(s)-f_N(s)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ in (α, β) gilt, wird offenbar jede zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörige Verschiebungszahl von $f_N(s)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $f(s)$ sein.

Corollar. *Die Summe einer in $[\alpha, \beta]$ gleichmässig konvergenten Reihe der Form*

$$\sum_1^\infty a_n e^{\lambda_n s}$$

ist fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$.

Satz 6. *Die Ableitung $f'(s)$ einer in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ ist ebenfalls in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $f'(s)$ im Teilstreifen $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ fastperiodisch ist, bestimmen wir zunächst eine kleine positive Zahl r so, dass $\alpha_1 - r > \alpha$, $\beta_1 + r < \beta$ ausfällt. Die Fastperiodizität von $f'(s)$ wird nachgewiesen sein, wenn wir gezeigt haben werden, dass bei gegebenem ε jede Zahl τ, die eine zu εr gehörige Verschiebungszahl von $f(s)$ in $(\alpha_1 - r, \beta_1 + r)$ ist, ebenfalls eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $f'(s)$ in (α_1, β_1) ist. Für jedes s in $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ gilt nach dem Cauchyschen Satze

$$f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-s|=r} \frac{f(z)}{(z-s)^2} dz,$$

also

$$f'(s+i\tau) - f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-(s+i\tau)|=r} \frac{f(z)}{(z-(s+i\tau))^2} dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-s|=r} \frac{f(z)}{(z-s)^2} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-s|=r} \frac{f(z+i\tau)-f(z)}{(z-s)^2} dz.$$

Daher besteht, wenn τ eine zu εr gehörige Verschiebungszahl von $f(s)$ in $(\alpha_1 - r, \beta_1 + r)$ ist, die Ungleichung

$$|f'(s+i\tau) - f'(s)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r\varepsilon}{r^2} r \, d\theta = \varepsilon.$$

Wir schliessen diesen Paragraphen mit einem für unsere Funktionenklasse charakteristichen Satze über die »Abgeschlossenheit» der Wertmenge einer fastperiodischen Funktion in unendlicher Nähe einer beliebigen Geraden des Fastperiodizitätsgebietes.

Satz 7. *Gegeben sei eine in* (α, β) *fastperiodische Funktion* $f(s)$ *und eine Gerade* $\sigma=\sigma_0$ *im Innern dieses Streifens. Dann wird jeder Wert* w_0 *der abgeschlossenen Hülle der von* $f(s)$ *auf der Geraden* $\sigma=\sigma_0$ *angenommenen Wertmenge in jedem Streifen* $\sigma_0-\delta<\sigma<\sigma_0+\delta$ *von der Funktion* $f(s)$ *tatsächlich angenommen.*[1]

Beweis. Falls $f(s)$ eine Konstante ist, ist der Satz trivial. Wir ziehen den Satz C, § 2 heran, den wir auf die Funktion $\varphi(s)=f(s)-w_0$ in einem die Gerade $\sigma=\sigma_0$ enthaltenden Teilstreifen $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ anwenden. Die Voraussetzungen des Satzes C sind erfüllt. Denn

1. der Wert 0 gehört zur abgeschlossenen Hülle der Wertmenge von $\varphi(s)$ auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$, und

2. es gibt eine positive Grösse d und eine Länge l, so dass in jedem Intervall der Länge l auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ ein Punkt s mit $|\varphi(s)|>d$ existiert. Wir brauchen in der Tat nur von einem Punkte $s'=\sigma_0+it'$ auszugehen, für welchen $f(s')=w'\neq w_0$ ist, dann leisten die Zahlen $d=\frac{1}{2}|w'-w_0|$ und die Verschiebungslänge $l=l(d)$ das Gewünschte.

Also nimmt $\varphi(s)=f(s)-w_0$ in jedem Streifen $\sigma_0-\delta<\sigma<\sigma_0+\delta$ den Wert 0, d. h. $f(s)$ den Wert w_0 an.

Corollar 1. *Wenn eine in* (α, β) *fastperiodische Funktion* $f(s)$ *in diesem Streifen von* a *verschieden ist, ist in jedem Teilstreifen* $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ *die untere Grenze von* $|f(s)-a|$ *grösser als* 0.

Sonst würde es eine feste Zahl σ_0 im Intervalle $\alpha_1\leqq\sigma\leqq\beta_1$ geben, so dass $f(s)$ in jedem Streifen um die Gerade $\sigma=\sigma_0$ beliebig nahe an a herankäme, und es würde also (weil $f'(s)$ in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist) der Wert a zur abgeschlossenen Hülle der Wertmenge von $f(s)$ auf der Geraden $\sigma=\sigma_0$ gehören. Dies widerspricht aber nach dem obigen Satze der Voraussetzung $f(s)\neq a$ für $\alpha<\sigma<\beta$.

---

[1] Ein genaueres Studium des Wertevorrates einer fastperiodischen Funktionen kann unter Heranziehung der »zugehörigen» Funktion von unendlich vielen Variablen (BOHR [4]) durchgeführt werden. Diese Methode ist vom Verfasser für die üblichen Dirichletschen Reihen ausgebildet worden (vgl. BOHR [1]). In der vorliegenden Abhandlung soll jedoch auf diese Frage nicht weiter eingegangen werden.

Corollar 2. *Falls die in* $[\alpha, \beta]$ *fastperiodische Funktion* $f(s)$ *überall in* (α, β) *von* o *verschieden ist, ist die reziproke Funktion* $g(s) = \frac{1}{f(s)}$ *ebenfalls fastperiodisch in* $[\alpha, \beta]$.

In der Tat ist $g(s)$ nach dem Corollar 1 in $[\alpha, \beta]$ beschränkt und also — da sie nach II, § 1 auf einer festgehaltenen Geraden fastperiodisch in t ist — auch fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$.

§ 4.

Die Dirichletentwicklung.

Satz 8. *Für eine in* $[\alpha, \beta]$ *fastperiodische Funktion* $f(s)$ *existiert auf jeder festen Geraden* $\Re(s) = \sigma$ *des Streifens der Mittelwert*

$$M\{f(\sigma+it)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma+it)\,dt$$

$\left(\textit{sogar gleichmässig in } \gamma \textit{ der Mittelwert } \lim \frac{1}{T}\int_\gamma^{\gamma+T} f(\sigma+it)\,dt\right)$, *und dieser Mittelwert ist konstant in* σ, *d. h. von der Wahl der Geraden unabhängig.*

Beweis. Dass der Mittelwert auf jeder Geraden $\Re(s) = \sigma$ existiert (und sogar gleichmässig in γ) wissen wir schon nach IV, § 1 (auf $F(t) = f(\sigma+it)$ angewendet). Und dass er für zwei beliebige Werte σ_1 und σ_2 des Intervalles $\alpha < \sigma < \beta$ denselben Wert hat, folgt in einfachster Weise aus dem Cauchyschen Integralsatz. In der Tat gilt bei festem $T > 0$

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_1+iT} f(s)\,ds + \int_{\sigma_1+iT}^{\sigma_2+iT} f(s)\,ds + \int_{\sigma_2+iT}^{\sigma_2} f(s)\,ds + \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} f(s)\,ds = 0,$$

also, wenn G die obere Grenze von $|f(s)|$ in $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ bezeichnet,

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma_1+it)\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma_2+it)\,dt\right| \leq 2\frac{|\sigma_2-\sigma_1|}{T}\,G$$

und demnach (für $T \to \infty$)

$$M\{f(\sigma_1+it)\}=M\{f(\sigma_2+it)\}.$$

Durch Anwendung des Satzes auf die ebenfalls in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)\,e^{-\lambda s}$ (λ beliebig reell) ergibt sich das

Corollar. *Bei festgehaltenem λ ist der Mittelwert $M\{f(\sigma+it)\,e^{-\lambda(\sigma+it)}\}$, d. h. das Produkt*

$$e^{-\lambda\sigma} M\{f(\sigma+it)\,e^{-i\lambda t}\}$$

in σ konstant. Es ist also bei festem λ der Mittelwert $M\{f(\sigma+it)\,e^{-i\lambda t}\}$ im Intervalle $\alpha<\sigma<\beta$ entweder überall gleich 0 oder überall von 0 verschieden.

Satz 9. *Die Fourierreihen aller Funktionen $F_\sigma(t)=f(\sigma+it)$, welche den kontinuierlich vielen Geraden des Streifens $\alpha<\sigma<\beta$ entsprechen, gehen zu einer einzigen Entwicklung*

$$\sum A_n e^{\Lambda_n \sigma} \,.\, e^{i\Lambda_n t} = \sum A_n e^{\Lambda_n s}$$

zusammen, d. h. die Fourierexponenten Λ_n der Funktion $F_\sigma(t)$ sind vom Parameter σ unabhängig, und der Fourierkoeffizient des Exponenten Λ_n ist gleich $A_n e^{\Lambda_n \sigma}$, wo die Konstante A_n nicht von σ abhängt.

Beweis. Wir erhalten (V, § 1) die Fourierexponenten der Funktion $F_\sigma(t)=f(\sigma+it)$ als diejenigen, höchstens abzählbar vielen, Werte λ, für welche der Mittelwert

$$M\{f(\sigma+it)\,e^{-i\lambda t}\}$$

von 0 verschieden ist. Nach dem vorangehenden Corollar hat daher die Funktion $F_\sigma(t)$ für jeden Parameterwert σ dieselben Fourierexponenten. Es sei nunmehr Λ_n einer dieser Fourierexponenten. Der entsprechende Fourierkoeffizient $A_n^{(\sigma)}$ in der Entwicklung $F_\sigma(t) \sim \sum A_n^{(\sigma)} e^{i\Lambda_n t}$ ist dann durch den Mittelwert

$$A_n^{(\sigma)} = M\{f(\sigma+it)\,e^{-i\Lambda_n t}\}$$

gegeben. Durch nochmalige Anwendung des Corollars erhalten wir

$$A_n^{(\sigma)} = A_n e^{\Lambda_n \sigma},$$

wo A_n von σ unabhängig ist.

Wir nennen die obige Entwicklung *die »Dirichletentwicklung»* (*oder die Dirichletsche Reihe*) *der Funktion* $f(s)$ *im Streifen* (α, β), und schreiben

$$f(s) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n s}.$$

Die Grössen Λ_n bezw. A_n bezeichnen wir als die *Dirichletexponenten* bzw. *Dirichletkoeffizienten* der Funktion $f(s)$ (in (α, β)).[1]

Satz 10. *Für eine in* (α, β) *reinperiodische Funktion* $f(s)$ *von der Periode* ip *stimmt ihre Dirichletentwicklung* $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ *mit ihrer Laurentreihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{n \frac{2\pi}{p} s}$$

überein.

Beweis. Bei festgehaltenem σ repräsentiert die Laurentreihe bezw. die Dirichletreihe der Funktion $f(s)$ die Fourierreihe von $f(\sigma + it)$ im gewöhnlichen bezw. in unserem Sinne. Die zwei letzteren fallen aber (nach § 1) zusammen; folglich sind auch die zwei ersten formal identisch.

Aus den entsprechenden Sätzen in § 1 (IX und VII) ergeben sich ferner die folgenden Sätze.

Satz 11. Eindeutigkeitssatz. *Sind zwei Funktionen* $f(s)$ *und* $g(s)$ *in einem gemeinsamen Streifen* (α, β) *fastperiodisch mit derselben Dirichletentwicklung, so sind sie überhaupt identisch.*

Diesen Satz werden wir späterhin (in § 9) noch verschärfen, und zwar werden wir die Identität der beiden Funktionen $f(s)$ und $g(s)$ auch für den Fall nachweisen, wo nicht vorausgesetzt wird, dass ihre Fastperiodizitätsgebiete einen Streifen gemeinsam haben.

Satz 12. Fundamentalsatz. *Für jede Gerade* $\Re(s) = \sigma$ *im Streifen* $\alpha < \sigma < \beta$ *besteht die Gleichung*

$$M\{|f(\sigma + it)|^2\} = \sum |A_n|^2 e^{2\Lambda_n \sigma},$$

---

[1] Natürlich brauchen die Dirichletentwicklungen einer Funktion in verschiedenen Streifen nicht mit einander identisch zu sein. Wie sich später ergeben wird (vgl. den erweiterten Eindeutigkeitssatz in § 9), können die Entwicklungen einer Funktion in zwei verschiedenen Maximalstreifen sogar nie übereinstimmen.

was mit dem Bestehen von Mittelkonvergenz

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\left|f(\sigma+it)-\sum_{n=1}^{N}A_n\,e^{\Lambda_n(\sigma+it)}\right|^2\right\}=0$$

gleichbedeutend ist.

Auch die Sätze über das formale Rechnen übertragen sich unmittelbar aus § 1, wobei wir zum Nachweis ihrer Gültigkeit sogar nur eine einzige Gerade $\Re(s)=\sigma$ (und nicht die sämtlichen Geraden im Streifen $\alpha<\sigma<\beta$) zu betrachten brauchen, weil ja die Dirichletentwicklung einer Funktion $f(s)$ vollständig gegeben ist, wenn man sie bei einem einzigen festen σ kennt, d. h. wenn man für ein einziges σ die Fourierreihe von $f(\sigma+it)$ kennt. Wir fassen die Ergebnisse der Übertragung in dem folgenden Satze zusammen.

Satz 13. *Die Dirichletentwicklung der Summe bezw. des Produktes zweier in einem gemeinsamen Streifen fastperiodischen Funktionen entsteht durch formale Addition bezw. Multiplikation der Dirichletentwicklungen der Ausgangsfunktionen, und die Dirichletsche Reihe der Grenzfunktion einer gleichmässig konvergenten Folge durch formalen Grenzübergang aus den Dirichletschen Reihen der Folge.*

Ferner entsteht die Dirichletentwicklung der Ableitung einer fastperiodischen Funktion durch formale Differentiation, d. h. aus $f(s)\sim\sum A_n\,e^{\Lambda_n s}$ *folgt*

$$f'(s)\sim\sum A_n\,\Lambda_n\,e^{\Lambda_n s}.$$

Und schliesslich entsteht die Dirichletentwicklung des unbestimmten Integrales einer fastperiodischen Funktion — falls es (vgl. Satz 4) auch fastperiodisch ist — durch formale Integration,

$$\int f(s)\,ds\sim C+\sum\frac{A_n}{\Lambda_n}e^{\Lambda_n s}.$$

Schliesslich ergibt sich noch durch Übertragung aus § 1 der folgende

Satz 14. *Eine in* $[\alpha,\beta]$ *gleichmässig konvergente Reihe der Form*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{\lambda_n s}$$

ist eine Dirichletsche Reihe in unserem Sinne, nämlich die Dirichletreihe ihrer Summe $f(s)$.

Beweis. Nach Corollar zu Satz 5 ist die Summe $f(s)$ fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$, und auf einer festen Geraden $\Re(s)=\sigma$ des Streifens ist die Fourierreihe der Funktion $f(\sigma+it)$ nach VI, § 1 durch $\sum a_n e^{\lambda_n \sigma} e^{i\lambda_n t}$ gegeben.

§ 5.

Spezielle Typen von Dirichletentwicklungen.

Aus dem Satze 14 folgt, dass eine beliebig hingeschriebene Reihe $\sum a_n e^{\lambda_n s}$, welche in einem Streifen (α, β) absolut konvergiert, daselbst eine Dirichletentwicklung ist. In der Tat besteht gleichmässige Konvergenz in $[\alpha, \beta]$, weil die Reihe in jedem Teilstreifen (α_1, β_1) die Majorantenreihe $\sum |a_n| (e^{\lambda_n \alpha_1} + e^{\lambda_n \beta_1})$ besitzt.

Bei gewissen Typen von Reihen $\sum a_n e^{\lambda_n s}$, d. h. bei gewissen Typen von Exponenten und Koeffizienten, kann eine derartige Reihe nur dann in einem Streifen (α, β) eine Dirichletentwicklung sein, wenn sie in diesem Streifen (grobe d. h.) absolute Konvergenz aufweist.

Satz 15. *Es sei* $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ *die Dirichletentwicklung einer in* $[\alpha, \beta]$ *fastperiodischen Funktion* $f(s)$, *die sich unter einen der folgenden Fälle subsumiert:*

1. *Die Exponenten* Λ_n *sind linear unabhängig.*
2. *Die Koeffizienten* A_n *sind alle positiv.*
3. *Die Reihe* $\sum e^{-|\Lambda_n|\delta}$ *ist bei jedem festen* $\delta > 0$ *konvergent.*[1]

Dann ist die Reihe $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ *im ganzen Streifen* (α, β) *absolut konvergent.*

Beweis. Die Fälle 1 und 2 folgen unmittelbar aus den entsprechenden Sätzen über Fourierreihen (VIII, § 1).

Um den Fall 3 zu erledigen, also die Konvergenz der Reihe $\sum |A_n| e^{\Lambda_n \sigma_0}$ bei einem beliebigen festen σ_0 aus $\alpha < \sigma < \beta$ nachzuweisen, wählen wir ein δ_0 so

---

[1] Exponentenfolgen Λ_n, die der Bedingung 3 genügen, können sich natürlich nicht im Endlichen häufen, so dass nur von einer üblichen Dirichletschen Reihe (im Rogosinskischen Sinne) die Rede sein kann. Ein wichtiger Fall, in dem diese Bedingung zutrifft, ist der, wo die Grössen $|\Lambda_n|$ in monotoner Anordnung die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\Lambda_n|}{\log n} = \infty$$

erfüllen. Der letzte Spezialfall umfasst die Laurentreihen reinperiodischer Funktionen.

klein, dass die beiden Zahlen $\sigma_0 - \delta_0$ und $\sigma_0 + \delta_0$ ebenfalls dem Intervalle $\alpha < \sigma < \beta$ angehören. Da die Reihe $\sum A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0-\delta_0)} e^{i\Lambda_n t}$ eine Fourierreihe ist (nämlich die der Funktion $f(\sigma_0 - \delta_0 + it)$), sind die Koeffizienten $A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0-\delta_0)}$ beschränkt, und ähnliches gilt für die Koeffizienten $A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0+\delta_0)}$ der Fourierreihe $\sum A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0+\delta_0)} e^{i\Lambda_n t}$. Also gibt es eine gemeinsame Schranke K, so dass für alle n

$$|A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0 \pm \delta_0)}| < K$$

ist. Um nun die Koeffizienten $A_n e^{\Lambda_n \sigma_0}$ abzuschätzen, benutzen wir, falls $\Lambda_n \geqq 0$ ist, die Ungleichung

$$|A_n e^{\Lambda_n \sigma_0}| = |A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0+\delta_0)}| e^{-\Lambda_n \delta_0} < K e^{-\Lambda_n \delta_0}$$

und, falls $\Lambda_n < 0$ ist, die Ungleichung

$$|A_n e^{\Lambda_n \sigma_0}| = |A_n e^{\Lambda_n(\sigma_0-\delta_0)}| e^{\Lambda_n \delta_0} < K e^{-|\Lambda_n|\delta_0}.$$

Für jedes Λ_n gilt also

$$|A_n e^{\Lambda_n \sigma_0}| < K e^{-|\Lambda_n|\delta_0},$$

woraus die behauptete Konvergenz der Reihe $\sum |A_n| e^{\Lambda_n \sigma_0}$ folgt.

Im Falle 2 (positive Koeffizienten) wollen wir noch den folgenden Satz beweisen, der einen bekannten Vivanti-Landauschen Satz über Dirichletsche Reihen mit monotonen Exponenten (vgl. Landau [1], S. 880) auf unsere Reihen überträgt.

Satz 16. *Es habe die Dirichletentwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ einer Funktion $f(s)$ in einem Maximalstreifen (α^*, β^*) lauter positive Koeffizienten. Dann ist jeder der reellen Punkte $s = \alpha^*$, $s = \beta^*$ (falls er endlich ist) eine singuläre Stelle der Funktion $f(s)$.*

Beweis. Nach dem vorigen Satze konvergiert die Reihe $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ absolut in (α^*, β^*), also konvergieren die Teilreihen

$$\sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s} \quad \text{und} \quad \sum_{\Lambda_n \leqq 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

absolut in $(-\infty, \beta^*)$ bezw. $(\alpha^*, +\infty)$ und stellen dort analytische (in jedem Teilstreifen fastperiodische) Funktionen $f_1(s)$ bezw. $f_2(s)$ dar, mit

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s) \qquad \text{in } (\alpha^*, \beta^*).$$

Um zu zeigen, dass $f(s)$ in dem nach Voraussetzung endlichen Punkte β^* (bezw. α^*) eine singuläre Stelle hat, gilt es also nachzuweisen, dass $f_1(s)$ in β^* (bezw. $f_2(s)$ in α^*) singulär ist. Aus Symmetriegründen genügt es natürlich den Punkt β^* zu betrachten. Nach dem Vorbilde von Landau schliessen wir folgendermassen:

In der Umgebung von $s=\beta^*-1$ mit einem Radius $r\geqq 1$ gilt die Potenzreihe

$$f_1(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(s-\beta^*+1)^\nu}{\nu!}f_1^{(\nu)}(\beta^*-1)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(s-\beta^*+1)^\nu}{\nu!}\sum_{\Lambda_n>0}A_n\Lambda_n^\nu e^{\Lambda_n(\beta^*-1)}.$$ [1]

Wäre $s=\beta^*$ eine reguläre Stelle von $f_1(s)$, so wäre $r>1$, also, wenn η zwischen β^* und β^*-1+r gewählt wird,

$$f_1(\eta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\eta-\beta^*+1)^\nu}{\nu!}\sum_{\Lambda_n>0}A_n\Lambda_n^\nu e^{\Lambda_n(\beta^*-1)}.$$

In der Doppelreihe rechts sind alle Glieder positiv, und daher ist die Reihenfolge der Summationen gleichgültig. Also wäre

$$f_1(\eta)=\sum_{\Lambda_n>0}A_n e^{\Lambda_n(\beta^*-1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\eta-\beta^*+1)^\nu}{\nu!}\Lambda_n^\nu$$

$$=\sum_{\Lambda_n>0}A_n e^{\Lambda_n(\beta^*-1)}e^{\Lambda_n(\eta-\beta^*+1)}=\sum_{\Lambda_n>0}A_n e^{\Lambda_n\eta}.$$

Somit wäre die Reihe $\sum\limits_{\Lambda_n>0}A_n e^{\Lambda_n s}$ rechts über $\sigma=\beta^*$ hinaus absolut konvergent;

[1] Nach Satz 13 entstehen die Dirichletentwicklungen der Ableitungen von $f_1(s)$ durch formale Differentiation der Entwicklung $\sum\limits_{\Lambda_n>0}A_n e^{\Lambda_n s}$ von $f_1(s)$, und sie sind wieder in $(-\infty, \beta^*)$ absolut konvergent, weil sie ebenfalls positive Koeffizienten haben.

also wäre die Funktion $f_1(s)$ und damit auch $f(s)=f_1(s)+f_2(s)$ über $\sigma=\beta^*$ hinweg fastperiodisch, was der Voraussetzung, dass (α^*, β^*) ein Maximalstreifen ist, widerstreitet.

§ 6.

Allgemeiner Approximationssatz.

Satz 17. Approximationssatz. *Damit eine im Streifen $\alpha<\sigma<\beta$ reguläre Funktion $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch ist, ist notwendig und hinreichend, dass sie sich in $[\alpha, \beta]$ durch Exponentialpolynome $\sum_1^N a_n e^{\lambda_n s}$ gleichmässig approximieren lässt.*

Hierbei können, bei jeder fastperiodischen Funktion $f(s)$, die approximierenden Exponentialpolynome so gewählt werden, dass ihre Exponenten λ_n der Folge der Dirichletexponenten $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ der Funktion entnommen sind.[1]

Beweis. Dass die Bedingung hinreichend ist, folgt sofort aus dem Corollar zu Satz 3 in Verbindung mit dem Satze 5.

Die Notwendigkeit folgt aus XVI, § 1, wenn wir diesen Satz (bei einer beliebig gegebenen in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s) \backsim \sum A_n e^{\Lambda_n s}$ und einem beliebig gewählten Teilstreifen $\alpha_1<\sigma<\beta_1$) auf die Menge M der Funktionen

$$F_\sigma(t)=f(\sigma+it) \qquad \alpha_1<\sigma<\beta_1$$

anwenden. Die Voraussetzungen des Satzes XVI sind erfüllt. Denn die Funktionen $F_\sigma(t)$ haben alle dieselben Fourierexponenten Λ_n, und genügen ausserdem den drei Bedingungen:

1. sie sind gleichartig gleichmässig stetig, weil $f(s)$ (nach Corollar zu Satz 1) in $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ gleichmässig stetig ist,

2. sie sind gleichartig fastperiodisch, weil $f(s)$ in (α_1, β_1) fastperiodisch ist,

3. es gibt eine Majorante der Reihe $\sum |A_n^{(\sigma)}|^2$; denn bei festem n gilt für $\alpha_1<\sigma<\beta_1$ die Abschätzung

[1] Dass die Exponenten λ_n so gewählt werden können (ohne dass man etwa alle linearen Kombinationen der Λ_n mit rationalen Koeffizienten berücksichtigen müsste) ist für die späteren Überlegungen in § 7 von entscheidender Bedeutung. In der Tat werden wir dort benutzen müssen, dass eine fastperiodische Funktion mit lauter positiven (negativen) Dirichletexponenten Λ_n durch Exponentialpolynome mit gleichfalls nur positiven (negativen) Exponenten λ_n approximiert werden kann.

$$|A_n^{(\sigma)}| = |A_n| e^{A_n \sigma} < |A_n| (e^{A_n \alpha_1} + e^{A_n \beta_1}) = \boldsymbol{A}_n,$$

und wegen der Konvergenz der beiden Reihen $\sum |A_n|^2 e^{2 A_n \alpha_1}$ und $\sum |A_n|^2 e^{2 A_n \beta_1}$ konvergiert die Reihe $\sum \boldsymbol{A}_n^2$.

Nach dem angeführten Satze gibt es daher zu jedem δ ein N und dazugehörige N reelle Faktoren $r_1, r_2, \ldots, r_N$, so dass für jede Funktion $F_\sigma(t)$ der Menge $\boldsymbol{M}$ die Ungleichung

$$\left| F_\sigma(t) - \sum_1^N r_n A_n^{(\sigma)} e^{i A_n t} \right| < \delta$$

im ganzen Intervalle $-\infty < t < \infty$ besteht. Dies besagt aber gerade, dass das Exponentialpolynom

$$\sum_1^N r_n A_n e^{A_n s}$$

die Funktion $f(s)$ im ganzen Streifen $\alpha_1 < \sigma < \beta_1$ bis auf δ approximiert.

§ 7.

Funktionen mit Dirichletexponenten von gleichem Vorzeichen.

Für die weitere Theorie spielen fastperiodische Funktionen, deren Exponenten alle dasselbe Vorzeichen haben, eine wichtige Rolle. Es genügt natürlich z. B. das negative Vorzeichen anzunehmen (sonst ersetze man s durch $-s$).

Wir beweisen zunächst einen Randwertsatz.

Satz 18. *Wenn*

$$F(t) \sim \sum A_n e^{i A_n t}$$

eine beliebige fastperiodische Funktion der reellen Variablen t mit lauter negativen Fourierexponenten A_n ist, dann gibt es eine für $\sigma \geqq 0$ stetige, in $\sigma > 0$ reguläre Funktion $f(s)$, deren Randwerte auf der Gerade $\sigma = 0$ durch $F(t)$ gegeben werden,

$$f(it) = F(t).$$

Diese Funktion ist fastperiodisch in der ganzen rechten Halbebene $(0, \infty)$, strebt für $\sigma \to \infty$ gleichmässig in t gegen 0, und ihre Dirichletentwicklung lautet

$$f(s) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n s}.$$ [1]

Beweis. Wir wenden den Approximationssatz XV, § 1 auf die Funktion $F(t)$ an. Er liefert eine Folge von Exponentialpolynomen

$$\Phi_m(t) = \sum_{n=1}^{N(m)} a_n^{(m)} e^{i \Lambda_n t},$$

die gleichmässig in t gegen $F(t)$ konvergieren. Wir lösen die (triviale) Randwertaufgabe für diese Polynome, d. h. bilden die analytischen Exponentialpolynome

$$\varphi_m(s) = \sum_{n=1}^{N(m)} a_n^{(m)} e^{\Lambda_n s}.$$

Nach Satz A, § 2, angewendet bei festem m_1 und m_2 auf das Exponentialpolynom $\varphi(s) = \varphi_{m_1}(s) - \varphi_{m_2}(s)$ mit nur negativen Exponenten, ist

$$\underset{\sigma \geqq 0}{\text{Obere Grenze}} \, |\varphi_{m_1}(s) - \varphi_{m_2}(s)| = \underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} \, |\Phi_{m_1}(t) - \Phi_{m_2}(t)|,$$

woraus folgt, dass die analytischen Exponentialpolynome $\varphi_m(s)$ gleichmässig in der ganzen abgeschlossenen Halbebene $\sigma \geqq 0$ gegen eine Grenzfunktion $f(s)$ konvergieren. Diese Funktion $f(s)$ hat alle behaupteten Eigenschaften. Denn sie ist stetig für $\sigma \geqq 0$, analytisch in $\sigma > 0$, und nimmt auf dem Rande $\sigma = 0$ die Werte $F(t)$ an; ferner strebt sie für $\sigma \to \infty$ gleichmässig gegen 0, weil dies für jedes einzelne approximierende Polynom $\varphi_m(s)$ zutrifft und die Konvergenz der $\varphi_m(s)$ für $\sigma \geqq 0$ eine gleichmässige ist. Und schliesslich ist sie (nach Satz 5 und Corollar zu Satz 3) fastperiodisch in $(0, \infty)$, und hat dort die im Satze genannte Dirichletentwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$. Denn nach XII, § 1 geht die Fourierreihe (Exponentialpolynom) $\sum_{n=1}^{N(m)} a_n^{(m)} e^{i \Lambda_n t}$ der Funktion $\Phi_m(t)$ beim Grenzübergang $m \to \infty$ formal in die Fourierreihe $\sum A_n e^{i \Lambda_n t}$ der Funktion $F(t) = \lim_{m \to \infty} \Phi_m(t)$ über; also

[1] Aus dem Satze 18 folgt, dass eine fastperiodische Funktion $F(t)$ einer reellen Variablen t mit lauter negativen (oder lauter positiven) Fourierexponenten *durch ihre Werte in einem beliebig kleinen Intervalle $t_1 < t < t_2$ eindeutig gekennzeichnet ist.* Denn eine für $\sigma \geqq 0$ stetige, in $\sigma > 0$ reguläre Funktion ist (nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip) identisch 0, wenn sie in allen Punkten eines Intervalles auf dem Rande $\sigma = 0$ verschwindet.

geht das Exponentialpolynom $\sum\limits_{n=1}^{N(m)} a_n^{(m)} e^{A_n s}$ für $m \to \infty$ formal in die Reihe $\sum A_n e^{A_n s}$ über, und diese letzte Reihe wird daher nach Satz 13 die Dirichletsche Reihe von $f(s) = \lim\limits_{m \to \infty} \varphi_m(s)$ sein.

Aus diesem Randwertsatze können wir in wenigen Worten den folgenden Satz herleiten.

Satz 19. *Falls die Dirichletentwicklung* $\sum A_n e^{A_n s}$ *einer in* $[\alpha, \beta]$ *fastperiodischen Funktion* $f(s)$ *nur negative Exponenten hat, dann existiert die Funktion in der ganzen rechten Halbebene* $\alpha < \sigma < \infty$, *ist in* $[\alpha, +\infty)$ *fastperiodisch und strebt für* $\sigma \to \infty$ *gleichmässig in* t *gegen* 0.

Beweis. Es sei α_1 eine beliebige Zahl $> \alpha$. Die Funktion $F(t) = f(\alpha_1 + it)$ hat die Fourierreihe $\sum A_n e^{A_n(\alpha_1 + it)}$ mit lauter negativen Fourierexponenten und ist daher nach Satz 18 Randfunktion einer in der ganzen rechten Halbebene (α_1, ∞) existierenden fastperiodischen Funktion. Letztere muss aber mit der Ausgangsfunktion identisch sein, da sie für $\sigma = \alpha_1$ mit dieser zusammenfällt.

Wenn wir nicht lauter negative, sondern nur *lauter »nicht-positive» Exponenten* A_n voraussetzen, also ein *konstantes Glied* zulassen, gilt der Satz 19 natürlich ebenso, *nur dass* $f(s)$ *für* $\sigma \to \infty$ *gegen eben dieses konstante Glied konvergiert* (statt gerade gegen 0). Der so gewonnene Satz lässt sich umkehren: jede in einer rechten Halbebene reguläre Funktion, die in jeder kleineren Halbebene fastperiodisch ist, und für $\sigma \to \infty$ gleichmässig gegen einen endlichen Limes strebt, hat lauter nicht-positive Exponenten. Die Voraussetzungen dieser Umkehrung lassen sich sogar noch wesentlich einschränken, was für das Spätere von Wichtigkeit ist.

Satz 20. *Eine in* $[\alpha, \infty]$ *fastperiodische Funktion* $f(s)$ *die für* $\sigma \to \infty$, *d. h. in* $[\alpha, \infty)$, *beschränkt ist, hat lauter nicht-positive Exponenten;* sie muss also von selbst in $[\alpha, \infty)$ fastperiodisch sein, und für $\sigma \to \infty$ einem Limes zustreben.

Beweis. Wäre auch nur ein einziges Glied mit einem positiven Exponenten, etwa $\gamma e^{\mu s}$, in der Entwicklung von $f(s)$ vorhanden, dann könnte $f(s)$ für $\sigma \to \infty$ nicht beschränkt bleiben, wie aus der Abschätzung

$$\underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |f(\sigma + it)| \geqq |M\{f(\sigma + it) e^{-i\mu t}\}| = |\gamma e^{\mu \sigma}|$$

unmittelbar folgt.

Wir sprechen noch den Inhalt der Sätze 19 und 20 für den ganz analogen Fall nicht-negativer Exponenten aus.

Satz 21. *Wenn die Dirichletentwicklung einer in* $[\alpha, \beta]$ *fastperiodischen Funktion lauter nicht-negativen Exponenten hat, dann existiert die Funktion in der ganzen linken Halbebene* $\sigma<\beta$, *ist in* $(-\infty, \beta]$ *fastperiodisch und strebt für* $\varrho\to-\infty$ *gegen das konstante Glied ihrer Reihe.*

Um zu schliessen, dass eine in $[-\infty, \beta]$ *fastperiodische Funktion lauter nicht-negative Exponenten hat, genügt es vorauszusetzen, dass sie für* $\sigma\to-\infty$ *beschränkt bleibt.*

Beiläufig bringen wir noch den, aus den obigen Sätzen sofort ableitbaren,

Satz 22. *Jede in einem Streifen fastperiodische Funktion* $f(s)$, *deren Exponenten dem absoluten Betrage nach beschränkt sind, ist notwendigerweise eine ganze Transzendente und fastperiodisch in* $[-\infty, \infty]$.

Beweis. Aus $|\Lambda_n|<K$ folgt, dass $f(s)\,e^{+Ks}$ und $f(s)\,e^{-Ks}$ Dirichletentwicklungen mit lauter positiven bezw. lauter negativen Exponenten haben, also nach links bezw. nach rechts analytisch fortsetzbar und fastperiodisch sind.

Wir schliessen diesen Paragraphen mit einem Satze über die Integration einer fastperiodischen Funktion mit Exponenten gleichen Vorzeichens.

Satz 23. *Eine in* $[\alpha, \infty)$ *fastperiodische Funktion* $f(s)\sim\sum A_n e^{\Lambda_n s}$, *deren Exponenten alle negativ sind und sich nicht gegen* 0 *häufen, hat ein unbestimmtes Integral* $F(s)$, *welches gleichfalls in* $[\alpha, \infty)$ *fastperiodisch ist.* Nach Satz 13 wird dann die Dirichletsche Reihe von $F(s)$ durch

$$F(s) \sim C+\sum \frac{A_n}{\Lambda_n}\, e^{\Lambda_n s}$$

gegeben sein.

Beweis. Nach Satz 19 und 4 genügt es nachzuweisen, dass $F(s)$ in $[\alpha, \infty]$ beschränkt ist, und hierzu wiederum, dass $F(s)$ auf einer einzigen Geraden $\sigma=\sigma_1\,(>\alpha)$ beschränkt ist, also dass das Integral

$$\int_0^T f(\sigma_1+it)\,dt \qquad (-\infty<T<\infty)$$

absolut genommen unterhalb einer Konstanten liegt. Es bezeichne $-\Lambda^* < 0$ die obere Grenze der Exponenten Λ_n; dann hat die Funktion $f(s)\,e^{\Lambda^* s}$ eine Dirichletentwicklung mit lauter nicht-positiven Exponenten, strebt also für $\sigma \to \infty$ einem endlichen Limes zu, so dass für $\sigma \geqq \sigma_1$ die Ungleichung

$$|f(s)| < K e^{-\Lambda^* \sigma}$$

mit einem konstanten K gilt. Nachdem somit gefunden ist, dass $f(s)$ für $\sigma \to \infty$ mindestens wie eine Exponentialfunktion gegen 0 strebt, ist die Beschränktheit des Integrales $\int\limits_0^T f(\sigma_1 + it)\,dt$ unmittelbar ersichtlich; in der Tat folgt aus dem Cauchyschen Satze (bei einem $\sigma_2 > \sigma_1$) die Abschätzung

$$\left|\int\limits_0^T f(\sigma_1+it)\,dt\right| \leqq \left|\int\limits_0^T f(\sigma_2+it)\,dt\right| + \left|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(\sigma)\,d\sigma\right| + \left|\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(\sigma+iT)\,d\sigma\right|$$

$$\leqq T \,.\, K e^{-\Lambda^* \sigma_2} + 2\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} K e^{-\Lambda^* \sigma}\,d\sigma,$$

also für $\sigma_2 \to \infty$ (und beliebiges feste T) die Ungleichung

$$\left|\int\limits_0^T f(\sigma_1+it)\,dt\right| \leqq 2\int\limits_{\sigma_1}^{\infty} K e^{-\Lambda^* \sigma}\,d\sigma = \frac{2\,K e^{-\Lambda^* \sigma_1}}{\Lambda^*},$$

wo die rechte Seite von T unabhängig ist.

§ 8.

Das Verhalten im "Punkte" $\sigma = +\infty$.

Für eine in einem punktierten Kreis (d. h. mit Ausnahme des Mittelpunktes) reguläre Funktion — also in unserer Sprechweise, für eine in einer Halbebene reguläre reinperiodische Funktion — gibt es nach Weierstrass für das Verhalten beim Annähern an den Kreismittelpunkt (bezw. den Punkt $\sigma = \infty$) nur drei Möglichkeiten:

a) Sie strebt gegen einen endlichen Limes.

b) Sie strebt gegen Unendlich.

c) Sie kommt jedem Wert beliebig nahe.

Dieser Satz gilt, wie wir ihn eben ausgesprochen haben, nicht nur für reinperiodische Funktionen, sondern auch für die allgemeinsten fastperiodischen Funktionen.

Satz 24. *Für eine in $[\alpha, \infty]$ fastperiodische Funktion $f(s)$ bestehen, was ihr Verhalten im »Punkte» $\sigma = +\infty$ anbelangt, nur drei Möglichkeiten:*

A) *Sie strebt für $\sigma \to \infty$ gegen einen endlichen Limes.*

B) *Ihr absoluter Betrag wächst für $\sigma \to \infty$ gleichmässig ins Unendliche.*

C) *Sie kommt in jeder rechten Halbebene jedem Wert beliebig nahe.*

Beweis. Den Beweis führen wir (ebenso wie man es beim Weierstrassschen Satze tut) dadurch, dass wir zeigen, dass eine Funktion $f(s)$, die nicht die Eigenschaft **C** besitzt, unter eine der Klassen **A** und **B** fallen muss. Es möge also einen Wert w_0 geben, so dass $f(s)$ in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ in sicherer Entfernung von w_0 bleibt, d. h.

$$|f(s) - w_0| > K\,(>0) \qquad \text{für } \sigma > \sigma_0.$$

Wir betrachten die in $\sigma > \sigma_0$ reguläre Funktion

$$g(s) = \frac{1}{f(s) - w_0}.$$

Sie ist fastperiodisch in $[\sigma_0, \infty]$ (nach Corollar 2 zu Satz 7) und beschränkt für $\sigma \to \infty$ wegen

$$|g(s)| = \left|\frac{1}{f(s) - w_0}\right| < \frac{1}{K} \qquad \text{für } \sigma > \sigma_0.$$

Nach Satz 20 strebt also $g(s)$ für $\sigma \to \infty$ einem endlichen Limes g_0 zu. Der Beweis ist nunmehr zu Ende; denn 1) wenn $g_0 \neq 0$, gehört $f(s)$ zur Klasse **A**, und 2) wenn $g_0 = 0$, gehört $f(s)$ zu **B**.

Auch die im (»grossen») Picardschen Satze zum Ausdruck kommende Verschärfung des Weierstrassschen Satzes lässt sich übertragen.

Satz 25. *Jede in $[\alpha, \infty]$ fastperiodische Funktion $f(s)$, die zur Klasse* **C** *des Satzes 24 gehört, nimmt in jeder rechten Halbebene alle Werte mit höchstens einer Ausnahme an.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $f(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > \alpha_1$ $(> \alpha)$ alle Werte bis auf einen annimmt, betrachten wir eine Gerade $\sigma = \sigma_1$ $(> \alpha_1)$ und wenden den Iversenschen Satz E aus § 2 auf unsere Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma_1$ an. Es bezeichne H die abgeschlossene Hülle der (beschränkten) Wertmenge von $f(s)$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_1$. Da $f(s)$ zur Klasse **C** gehört, also die Wertmenge von $f(s)$ in jeder Halbebene $\sigma > \sigma_2$ $(> \sigma_1)$ überall dicht liegt, nimmt $f(s)$ nach dem angeführten Satze in der Halbebene $\sigma > \sigma_1$ sämtliche Werte, die nicht zur Menge H gehören, bis auf höchstens einen, an. Also nimmt sie in der Halbebene $\sigma > \alpha_1$ sämtliche Werte bis auf höchstens einen an, weil sie (nach Satz 7) in jedem Streifen um $\sigma = \sigma_1$ alle Werte der abgeschlossenen Hülle H effektiv annimmt.

Ob eine in $[\alpha, \infty]$ fastperiodische Funktion zur Klasse **A**, **B** oder **C** gehört, lässt sich in einfacher Weise an ihrer Dirichletschen Reihe erkennen.

Satz 26. *Eine in $[\alpha, \infty]$ fastperiodische Funktion $f(s) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n s}$ gehört zur Klasse* **A**, **B** *oder* **C**, *je nachdem*

α) die Dirichletexponenten sämtlich nicht-positiv sind,

β) es positive Exponenten gibt, und unter ihnen einen grössten Λ_ν,

γ) es positive Exponenten gibt, aber keinen grössten, d. h. die positiven Exponenten sich entweder gegen ∞ oder gegen eine endliche obere Grenze häufen, die aber selbst als Exponent nicht auftritt.

Beweis. Dass der Fall α der Klasse **A** entspricht, ist schon in § 7 bewiesen.

Dass eine Dirichletsche Reihe der Klasse β notwendigerweise zu einer Funktion der Klasse **B** gehört, ist ebenfalls aus § 7 klar, wenn man die Funktion $g(s) = f(s) e^{-\Lambda_\nu s}$ bildet; in der Tat hat die Dirichletsche Reihe von $g(s)$ lauter nicht-positive Exponenten und ein konstantes Glied $A_\nu \neq 0$, so dass $g(s)$ für $\sigma \to \infty$ gegen A_ν konvergiert, also $|f(s)| = |g(s) e^{\Lambda_\nu s}|$ gegen ∞ strebt.

Es erübrigt zu beweisen, dass eine Dirichletsche Reihe der Klasse γ nicht zu einer Funktion der Klasse **B** gehören kann, und also zu **C** gehören muss. Wir führen den Nachweis mit Hilfe des Satzes D aus § 2.

1. Zunächst betrachten wir den (einfacheren) Fall, wo die Λ_n sich gegen ∞ häufen. Wir nehmen an, dass die Funktion zur Klasse **B** gehört, und werden zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt. In der (zu widerlegenden) Annahme, dass $|f(s)| \to \infty$ für $\sigma \to \infty$, bestimmen wir eine Gerade $\sigma = \sigma_1$ $(> \alpha)$ und eine zugehörige positive Konstante K_1, so dass $|f(s)| > K_1$ in $\sigma > \sigma_1$. Danach wählen wir eine beliebige Abszisse $\sigma_2 > \sigma_1$ und bestimmen eine positive Konstante

$K_2 > K_1$, so dass $|f(s)| \leqq K_2$ auf $\sigma = \sigma_2$. Zu den somit festgelegten Zahlen σ_1, K_1, σ_2, K_2 können wir offenbar zwei positive Zahlen c und k so bestimmen, dass $K_1 = c e^{k\sigma_1}$ und $K_2 = c e^{k\sigma_2}$. Dann ist

$$|f(s)| > c e^{k\sigma_1} \qquad \text{in } \sigma > \sigma_1$$

und

$$|f(s)| \leqq c e^{k\sigma_2} \qquad \text{auf } \sigma = \sigma_2$$

Nach Satz D, § 2 ist also

$$|f(s)| \leqq c e^{k\sigma} \qquad \text{in } \sigma > \sigma_2.$$

Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass es ein Glied $A_N e^{\Lambda_N s}$ mit einem Exponenten $\Lambda_N > k$ gibt. Denn aus letzterer folgt für hinreichend grosses σ

$$\underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |f(\sigma + it)| \geqq |M\{f(\sigma + it) e^{-i\Lambda_N t}\}| = |A_N| e^{\Lambda_N \sigma} > c e^{k\sigma}.$$

2. Um den anderen Fall, in welchem die positiven Exponenten eine endliche obere Grenze Λ^* besitzen, die aber nicht zur Menge gehört, zu erledigen, müssen wir etwas genauer vorgehen. Zunächst bestimmen wir, wie im Falle 1, auf Grund der (zu widerlegenden) Annahme, dass die Funktion $f(s)$ zur Klasse **B** gehört, eine Abszisse $\sigma_1 > 0$ so gross, dass die untere Grenze von $|f(s)|$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_1$ grösser als 0 ist, dass also bei passender Wahl eines (kleinen) $c_0 > 0$

$$|f(s)| > c_0 e^{\Lambda^* \sigma_1} \qquad \text{in } \sigma > \sigma_1$$

ist. Da die Funktion $f(s) e^{-\Lambda^* s}$ lauter negative Dirichletexponenten hat, also für $\sigma \to \infty$ gleichmässig gegen 0 strebt, können wir $\sigma_2 > \sigma_1$ so gross wählen, dass

$$|f(s)| < \frac{c_0}{2} e^{\Lambda^* \sigma_2} \qquad \text{auf } \sigma = \sigma_2.$$

Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein $\Lambda' < \Lambda^*$, für welches

$$|f(s)| \leqq c_0 e^{\Lambda' \sigma_2} \qquad \text{auf } \sigma = \sigma_2.$$

Wegen $\Lambda' < \Lambda^*$ ist eo ipso auch

$$|f(s)| > c_0 e^{\Lambda' \sigma_1} \qquad \text{in } \sigma > \sigma_1.$$

Also gilt nach Satz D, § 2 die Ungleichung

$$|f(s)| \leqq c_0 e^{A'\sigma} \qquad \text{in } \sigma > \sigma_2.$$

Jetzt kommen wir auf den ganz analogen Widerspruch wie im ersten Falle, weil es wiederum ein Glied $A_N e^{A_N s}$ mit $A_N > A'$ gibt, so dass für hinreichend grosses σ

$$\underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |f(\sigma+it)| \geqq |M\{f(\sigma+it)e^{-iA_N t}\}| = |A_N| e^{A_N \sigma} > c_0 e^{A'\sigma}.$$

ausfällt.

Wir schliessen diesen Paragraphen mit einem Satze, welcher die Funktionen mit lauter negativen Exponenten — also die Funktionen, die in Halbebenen $[\alpha, \infty)$ fastperiodisch sind und für $\sigma \to \infty$ gegen 0 streben — in zwei Gruppen teilt.

Satz 27. *Falls eine fastperiodische Funktion $f(s)$ mit lauter negativen Exponenten keinen grössten Exponenten hat, so nimmt sie in jeder rechten Halbebene tatsächlich den Wert 0 an. Hat sie aber einen grössten Exponenten A_N, dann gibt es keine Nullstellen mit beliebig grosser Abszisse.*

Beweis. Der zweite Fall ist unmittelbar daraus ersichtlich, dass die Funktion $f(s)e^{-A_N s}$ für $\sigma \to \infty$ gegen eine von 0 verschiedene Konstante, nämlich den Fourierkoeffizienten A_N, konvergiert.

Beim Beweise des ersten Teiles des Satzes dürfen wir offenbar annehmen, dass die obere Grenze $A^*(\leqq 0)$ der Exponenten A_n gerade gleich 0 ist (sonst betrachte man nur $f(s)e^{-A^* s}$ statt $f(s)$ selbst). Würde $f(s)$ in einer gewissen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ den Wert 0 nicht annehmen, so wäre nach Corollar 2 zu Satz 7 die Funktion $g(s) = \frac{1}{f(s)}$ in $[\sigma_0, \infty]$ fastperiodisch. Also müsste sie, wegen $|g(s)| \to \infty$ für $\sigma \to \infty$ zur Klasse **B** gehören, d. h. einen grössten positiven Exponenten M mit dem entsprechenden Gliede $Be^{\mathrm{M}s}$ haben. Folglich würde $g(s)e^{-\mathrm{M}s}$ für $\sigma \to \infty$ gegen B streben, also für hinreichend grosse σ

$$|g(s)| > \frac{1}{2}|B| e^{\mathrm{M}\sigma}$$

sein. Somit gälte für grosse σ die Ungleichung

$$|f(s)| = \left|\frac{1}{g(s)}\right| < \frac{2}{|B|} e^{-\mathrm{M}\sigma}.$$

Die Dirichletentwicklung der Funktion $f(s)$ hat aber (nach Voraussetzung) Exponenten, die beliebig nahe an o kommen, enthält also ein Glied Ce^{Ns} mit $-M<N<0$. Nun haben wir unseren üblichen Widerspruch: Es ist für hinreichend grosses σ

$$\underset{-\infty<t<\infty}{\text{Obere Grenze}} \left|f(\sigma+it)\right| \geqq \left|M\{f(\sigma+it)e^{-iNt}\}\right| = |C|\,e^{N\sigma} > \frac{2}{|B|}e^{-M\sigma},$$

was mit der voraufgehenden Ungleichung nicht verträglich ist.

Aus dem Satz 27 ergibt sich das folgende Corollar, welches auf einen gewissen Unterschied zwischen den beiden unter **C** (also unter γ) zusammenfassten Gruppen von Funktionen — nämlich denjenigen, die unbeschränkte positive Exponenten haben, und denjenigen, deren Exponenten nach oben beschränkt sind — hinweist.

Corollar. *Eine Funktion $f(s)$ der Klasse* **C**, *deren Exponenten nach oben beschränkt sind, kann keinen Picardschen Ausnahmewert besitzen, d. h. sie nimmt in jeder rechten Halbebene überhaupt alle Werte an.*

Es genügt in jeder Halbebene den Funktionswert o nachzuweisen, weil für jeden Wert a die Funktion $f(s)-a$ ebenfalls die Voraussetzungen des Corollars erfüllt. Wir bilden die Funktion $g(s)=f(s)e^{-\Lambda^* s}$, wo $\Lambda^*>0$ die obere Grenze der Exponenten Λ_n bezeichnet. Diese Funktion $g(s)$ hat lauter negativen Exponenten, aber keinen grössten. Folglich nimmt $g(s)$, und also auch $f(s)=g(s)e^{\Lambda^* s}$, tatsächlich den Wert o an.

§ 9.

Die Laurenttrennung fastperiodischer Funktionen.

Wenn die Dirichletentwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ einer in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ in (α, β) absolut konvergiert, können wir sofort — nachdem wir der Einfachheit halber zuerst das eventuelle konstante Glied abgezogen haben — eine Trennung der Funktion in zwei fastperiodische Funktionen vornehmen,

$$f(s)=f_1(s)+f_2(s),$$

von denen die eine nach rechts, die andere nach links analytisch fortsetzbar und fastperiodisch ist und gegen o strebt. In der Tat liefern die in (α, ∞) bezw. $(-\infty, \beta)$ absolut konvergenten Reihen

$$\sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s} \quad \text{bezw.} \quad \sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

Funktionen der behaupteten Art. Für rein periodische Funktionen ist dies die gewöhnliche Laurenttrennung.

Im allgemeinen wird aber die Dirichletentwicklung einer fastperiodischen Funktion nicht absolut konvergieren, so dass die Möglichkeit für eine Trennung der Funktion durch Zerlegung der Dirichletschen Reihe nicht unmittelbar gegeben ist.

Wie wir sehen werden, lässt sich auch wirklich eine Trennung nicht immer durchführen. Sie ist aber immer dann möglich, wenn das Integral der Funktion wieder fastperiodisch ist.

Satz 28. *Es sei $f(s) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n s}$ eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion, und ihr Integral $F(s)$ sei ebenfalls fastperiodisch in $[\alpha, \beta]$.*[1] *Dann sind die zwei formal aufgestellten Teilreihen*

$$\sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s} \quad \text{und} \quad \sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

wirkliche Dirichletsche Reihen von fastperiodischen Funktionen, von denen die eine $f_1(s)$ für $\sigma > \alpha$ existiert, in $[\alpha, \infty)$ fastperiodisch ist und für $\sigma \to \infty$ gegen 0 strebt, während die andere $f_2(s)$ sich analog nach links (für $\sigma < \beta$) verhält. Und im Ausgangsstreifen (α, β) gilt die Zerlegung

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s).$$

Beweis. Die Voraussetzung, dass das Integral $F(s)$ wieder fastperiodisch ist, ist (nach Satz 1 und 4) vollkommen damit gleichbedeutend, dass $F(s)$ in $[\alpha, \beta]$ beschränkt ist. Wir können daher auf unsere Funktion $f(s)$ den Satz F aus § 2 anwenden und erhalten eine (eindeutige) Zerlegung

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s),$$

wo $f_1(s)$ in der Halbebene $\sigma > \alpha$ regulär ist, in $[\alpha, \infty)$ beschränkt ist, und für $\sigma \to \infty$ gegen 0 strebt, während $f_2(s)$ sich analog nach links verhält. Wir haben von den Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ noch nachzuweisen, dass sie in $[\alpha, \infty)$ bezw. in

[1] Hiermit ist speziell gesagt, dass die Dirichletentwicklung von $f(s)$ kein konstantes Glied enthält.

$(-\infty, \beta]$ fastperiodisch sind und daselbst die angegebenen Dirichletentwicklungen besitzen. Um zu zeigen, dass $f_1(s)$ in einer beschnittenen Halbebene $(\alpha <) \alpha' < \sigma < \infty$ fastperiodisch ist, greifen wir auf die im Beweise des Satzes F in § 2 bereits angegebene Integraldarstellung zurück,

$$f_1(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1 + i\infty}^{\alpha_1 - i\infty} \frac{F(z)}{(z-s)^2} dz,$$

wobei α_1 eine feste Zahl zwischen α und α' ist. Es sei $\tau = \tau(\varepsilon, \alpha_1)$ eine beliebige zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(\alpha_1 + it)$. Dann gilt für jedes $s_0 = \sigma_0 + it_0$ in der Halbebene $\sigma > \alpha'$ die Abschätzung

$$|f_1(s_0 + i\tau) - f_1(s_0)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\alpha_1 + it + i\tau) - F(\alpha_1 + it)|}{(\sigma_0 - \alpha_1)^2 + (t - t_0)^2} dt$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\alpha' - \alpha_1)^2 + t^2} = \frac{\varepsilon}{2(\alpha' - \alpha_1)},$$

so dass jedes solche $\tau = \tau(\varepsilon, \alpha_1)$ eine zu $\frac{\varepsilon}{2(\alpha' - \alpha_1)}$ gehörige Verschiebungszahl von $f_1(s)$ in $\alpha' < \sigma < \infty$ ist, womit die Fastperiodizität von $f_1(s)$ in $[\alpha, \infty)$ nachgewiesen ist. Ebenso zeigt man, dass $f_2(s)$ in $(-\infty, \beta]$ fastperiodisch ist. Da ferner die Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ für $\sigma \to +\infty$ bezw. $-\infty$ gegen 0 streben, haben sie nach § 7 lauter negative bezw. positive Dirichletexponenten. Hieraus folgt aber, dass sie tatsächlich die Reihen

$$\sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s} \quad \text{und} \quad \sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

zu Dirichletschen Reihen haben müssen, weil die formale Summe ihrer Dirichletreihen im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ die Reihe von $f(s)$, d. h. die Reihe $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ ergeben soll.

Der Satz besagt in anderer Wendung, dass für eine ganz beliebige fastperiodische Funktion, wenn nicht sie selbst, dann aber jedenfalls ihre Ableitung eine Laurenttrennung zulässt. Als eine wichtige Anwendung der letzteren Formulierung wollen wir eine (in § 4 angekündigte) Verfeinerung des Eindeutigkeitssatzes angeben.

Satz 29. Erweiterter Eindeutigkeitssatz. *Es seien in zwei nicht übereinander greifenden Streifen* $[\alpha, \beta]$ *und* $[\gamma, \delta]$ (*mit* $\alpha<\beta<\gamma<\delta$) *zwei fastperiodische Funktionen* $g(s)$ *und* $h(s)$ *gegeben, deren Dirichletentwicklungen formal identisch sind. Dann handelt es sich um eine und dieselbe Funktion, die im grossen Streifen* $[\alpha, \delta]$ *regulär und fastperiodisch ist.*

Beweis. Die Trennung von $g'(s)$ in $\alpha<\sigma<\beta$ und von $h'(s)$ in $\gamma<\sigma<\delta$ führt auf Funktionen $g_1(s)$, $g_2(s)$ und $h_1(s)$, $h_2(s)$, von denen $g_1(s)$ in $\sigma>\alpha$ existiert und — wegen der Identität der Dirichletreihen — in der kleineren Halbebene $\sigma>\gamma$ mit $h_1(s)$ zusammenfällt, während $h_2(s)$ in $\sigma<\delta$ existiert und in $\sigma<\beta$ mit $g_2(s)$ zusammenfällt. Also ist die Funktion

$$\varphi(s)=g_1(s)+h_2(s)$$

eine im grossen Streifen $[\alpha, \delta]$ fastperiodische Funktion, die in (α, β) mit $g'(s)$ und in (γ, δ) mit $h'(s)$ identisch ist. Um nunmehr von den Ableitungen $g'(s)$, $h'(s)$ zu den Funktionen $g(s)$, $h(s)$ selbst zu gelangen, betrachten wir dasjenige unbestimmte Integral $\Phi(s)$ von $\varphi(s)$, welches in (α, β) mit $g(s)$ zusammenfällt. Diese Funktion $\Phi(s)$ existiert und ist fastperiodisch im grossen Streifen $[\alpha, \delta]$, und fällt auch, wegen Übereinstimmung der Dirichletentwicklungen, mit $h(s)$ in (γ, δ) zusammen. Mithin sind $g(s)$ und $h(s)$ eine und dieselbe Funktion.

Die Voraussetzung des obigen Trennungssatzes, nämlich die der Fastperiodizität — oder Beschränktheit — des Integrales, bezog sich auf das Verhalten der Funktion (und nicht der Reihe). Wir werden jetzt einen recht allgemeinen Typus von Reihen angeben, von denen man unter Heranziehung eines Satzes aus § 7 leicht einsehen kann, dass bei ihnen die Trennung immer möglich ist.

Satz 30. *Falls die Dirichletexponenten* Λ_n *einer in* $[\alpha, \beta]$ *fastperiodischen Funktion sich um den Punkt* $\lambda=0$ *nicht häufen — es genügt schon, dass sie sich von der einen Seite nicht häufen — ist eine Trennung im Sinne des Satzes 28 immer möglich*

$$f(s)=c_0+f_1(s)+f_2(s) \qquad (c_0 \textit{ konstantes Glied})$$

mit

$$f_1(s)\sim\sum_{\Lambda_n<0} A_n\, e^{\Lambda_n s} \quad \textit{und} \quad f_2(s)\sim\sum_{\Lambda_n>0} A_n\, e^{\Lambda_n s}.$$

Beweis. Wir trennen die Ableitung $f'(s)\sim\sum A_n\, \Lambda_n e^{\Lambda_n s}$ in zwei Summanden

$$f'(s)=\varphi_1(s)+\varphi_2(s) \qquad (\text{in } \alpha<\sigma<\beta)$$

mit

$$\varphi_1(s) \sim \sum_{\Lambda_n < 0} A_n \Lambda_n e^{\Lambda_n s}, \qquad \varphi_2(s) \sim \sum_{\Lambda_n > 0} A_n \Lambda_n e^{\Lambda_n s}.$$

Nehmen wir an, dass die Λ_n sich z. B. von links nicht gegen 0 häufen, so hat die in $[\alpha, \infty)$ fastperiodische Funktion $\varphi_1(s)$ nach Satz 23 ein fastperiodisches Integral $\psi(s)$, dass wir so normieren, dass seine (durch formale Integration aus $\sum_{\Lambda_n < 0} A_n \Lambda_n e^{\Lambda_n s}$ entstehende) Dirichletsche Reihe kein konstantes Glied enthält, also durch $\sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s}$ gegeben ist. Nachdem somit gezeigt ist, dass die eine Teilreihe $\sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s}$ wirklich eine Dirichletreihe ist, folgt sofort, dass auch die andere Teilreihe $\sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s}$ eine Dirichletentwicklung ist, nämlich die Entwicklung der Funktion $f(s) - c_0 - \psi(s)$.[1]

Corollar. *Falls in der Exponentenmenge irgendwo eine Intervallücke, etwa um den Punkt λ_0 herum, vorhanden ist, kann man die Reihe bei λ_0 trennen, d. h. die Reihen*

$$\sum_{\Lambda_n < \lambda_0} A_n e^{\Lambda_n s} \quad \textit{und} \quad \sum_{\Lambda_n > \lambda_0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

sind für sich Dirichletentwicklungen fastperiodischer Funktionen (Beide Funktionen existieren in Halbebenen, aber nur eine Funktion strebt gegen 0).

Der Beweis ergibt sich sofort durch Anwendung des Satzes 30 auf die Funktion $f(s)\,e^{-\lambda_0 s}$.

Zum Schluss wollen wir noch durch Angabe eines Beispieles nachweisen, dass auch wirklich Dirichletreihen vorkommen können, die sich nicht bei $\lambda = 0$ trennen lassen.

Beispiel einer unzerlegbaren Funktion. Wir werden *eine in* $(-1, 1)$ *fastperiodische Funktion* $f(s) \sim \sum A_n e^{\Lambda_n s}$ konstruieren, *die sich in keinem Teilstreifen*

[1] Dass die Ableitung einer fastperiodischen Funktion in bezug auf Trennung ein so viel reguläreres Benehmen als die Funktion selbst aufweist — indem sie auch dann, wenn die Exponenten sich beliebig gegen 0 häufen, eine Trennung zulässt — ist auch aus »äusseren» Gründen, d. h. dem Aussehen ihrer Reihe nach, verständlich, indem ja durch das Differentiieren in die Dirichletsche Reihe Faktoren zu den Koeffizienten hinzutreten, die gerade in der Nähe des Punktes $\lambda = 0$ sehr klein sind.

$(-\gamma, \gamma)$ *um die Gerade* $\sigma=0$ *in die Summe zweier Funktionen mit den Entwicklungen*

$$\sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s} \quad und \quad \sum_{\Lambda_n \leqq 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

zerlegen lässt.

Wir gehen von der bekannten, für alle $m=1, 2, \ldots$ und alle reellen t gültigen Ungleichung

$$\left|\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots + \frac{\sin mt}{m}\right| \leqq C,$$

oder anders geschrieben

$$\left|\left(e^{it} + \frac{e^{i2t}}{2} + \cdots + \frac{e^{imt}}{m}\right) - \left(e^{-it} + \frac{e^{-i2t}}{2} + \cdots + \frac{e^{-imt}}{m}\right)\right| \leqq 2\,C = C_1,$$

aus, wo C eine absolute Konstante $\left(=\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx\right)$ bedeutet, und bilden bei beliebigem festen m das analytische Exponentialpolynom

$$f_m(s) = \left(e^s + \frac{e^{2s}}{2} + \cdots + \frac{e^{ms}}{m}\right) - \left(e^{-s} + \frac{e^{-2s}}{2} + \cdots + \frac{e^{-ms}}{m}\right).$$

Auf der Geraden $\sigma=0$ ist $|f_m(s)| \leqq C_1$, aus Stetigkeitsgründen können wir daher eine positive Grösse σ_m so klein wählen, dass im ganzen Streifen $-\sigma_m < \sigma < \sigma_m$ die Ungleichung

$$|f_m(s)| < 2\,C_1 = C_2$$

besteht. Also ist bei jedem $m=1, 2, \ldots$ die Funktion

$$\varphi_m(s) = f_m(\sigma_m s) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{e^{\nu \sigma_m s}}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{e^{-\nu \sigma_m s}}{\nu}$$

im Streifen $-1 < \sigma < 1$ absolut genommen $< C_2$. Hierbei denken wir uns die Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ (sukzessive) so gewählt, dass sie von einander linear unabhängig sind.

Wir wählen eine Folge von positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, für welche

$$\sum \varepsilon_m \text{ konvergiert}, \qquad \sum \varepsilon_m \log m \text{ divergiert},$$

und bilden die Summe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \varphi_m(s).$$

Die letzte Reihe konvergiert gleichmässig in $(-1, 1)$ und stellt also — da jedes Glied fastperiodisch ist — eine in $(-1, 1)$ fastperiodische Funktion $f(s)$ dar. Da die Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ linear unabhängig sind, können bei der formalen Substitutionen der Dirichletentwicklungen von $\varphi_m(s)$ in die Reihe $\sum \varepsilon_m \varphi_m(s)$, wodurch (nach Satz 13) die Dirichletentwicklung $\sum A_n e^{\Lambda_n s}$ von $f(s)$ erhalten wird, keine zwei Exponentialterme kollidieren, und diese letze Entwicklung besteht daher aus sämtlichen Gliedern

$$\varepsilon_m \frac{e^{\nu \sigma_m s}}{\nu} \quad \text{und} \quad -\varepsilon_m \frac{e^{-\nu \sigma_m s}}{\nu} \qquad (m=1, 2, \ldots; \ 1 \leqq \nu \leqq m)$$

aller beitragenden Exponentialpolynome.

Wir betrachten nunmehr die Teilreihe $\sum\limits_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s}$, die aus allen Termen $\varepsilon_m \frac{e^{\nu \sigma_m s}}{\nu}$ besteht. Um zu zeigen, dass diese Reihe in keinem Streifen um $\sigma=0$ die Dirichletentwicklung einer fastperiodischen Funktion sein kann, genügt es nachzuweisen, dass sie auf der Geraden $\sigma=0$ keine Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion von t ist. Und das letztere folgt sofort aus VIII, § 1; denn die Reihe $\sum\limits_{\Lambda_n > 0} A_n e^{i \Lambda_n t}$ hat lauter positive Koeffizienten, ist jedoch für $t=0$ divergent, weil

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu} > \log m$$

ist, und $\sum \varepsilon_m \log m$ divergiert.

Schlussbemerkung.

In der vorliegenden Abhandlung haben wir eine Definition der Fastperiodizität zugrundegelegt, welche die Beschränktheit der umfassten Funktionen involvierte. Bei fast allen betrachteten Fragen erlaubte die so abgegrenzte Klasse einfache und allgemeine Antworten, die die Funktionenklasse als abgerundet und in sich geschlossen charakterisierten. Nur bei dem in dem letzten Paragraphen behandelten Problem der Laurenttrennung zeigte sich ein anderes Verhalten, indem eine solche Trennung innerhalb der Klasse nicht immer möglich war, sondern nur dann, wenn man als Komponenten bei der Trennung auch Funktionen zuliesse, die als Integrale von fastperiodischen Funktionen nicht beschränkt bleiben, und also *nicht* unter unsere Definition der Fastperiodizität fallen. Aus einer kleinen Untersuchung über die Dirichletschen L-Funktionen (Bohr [2]), welche der Reihe von Arbeiten unter dem gemeinsamen Titel »Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen» vorausging, ist aber zu ersehen, dass in gewissen Fällen die Fastperiodizität einer analytischen Funktion auch über den Streifen der Beschränktheit hinaus stark fühlbar ist. Das sich also ergebende Problem, die Definition der Fastperiodizität nach dieser Richtung hin zu erweitern, soll aber in der vorliegenden Abhandlung nicht in Angriff genommen werden.

Verzeichnis der zitierten Literatur.

S. Bochner [1] Sur les fonctions presque périodiques de Bohr. Comptes rendus, Paris, Bd. 180 (1925).

H. Bohr [1] Zur Theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen. Math. Ann., Bd. 79 (1919).

[2] Über eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen. Math. Ann., Bd. 85 (1922).

[3] Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I. Acta mathem., Bd. 45 (1924).

[4] Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II. Acta mathem., Bd. 46 (1925).

[5] Einige Sätze über Fourierreihen fastperiodischer Funktionen. Math. Zeitschr., Bd. 23 (1925).

G. Doetsch [1] Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden. Math. Zeitschr., Bd. 8 (1920).

F. Iversen [1] Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier. Öfv. finska vet. soc., Bd. 58 (Nr. 25) (1915—16).

E. Landau [1] Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Bd. II, Leipzig (1909).

P. Montel [1] Leçons sur les séries de polynomes. Collection Borel, Paris (1910).

W. Rogosinski [1] Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Math. Zeitschr., Bd. 20 (1924).

36—25280. *Acta mathematica.* 47. Imprimé le 9 décembre 1925.