ZUR THEORIE DER MEROMORPHEN FUNKTIONEN.

VON

ROLF NEVANLINNA

in HELSINGFORS.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Das zentrale Problem in der Theorie der ganzen Funktionen bildet die Frage nach denjenigen Beziehungen, welche zwischen dem Anwachsen einer ganzen Funktion $f(x)$ und der Dichte der Wurzeln der Gleichung $f(x) = z$ bestehen, wobei z eine endliche, von x unabhängige Zahl bezeichnet. Charakterisiert man das Anwachsen einer gegebenen ganzen Funktion, wie üblich, durch den Maximalmodul

$$M(r) = \max_{|x|=r} |f(x)|,$$

die Dichtigkeit der z-Stellen der Funktion wiederum durch die Anzahl $n(r;\, z)$ dieser Stellen in dem Kreise $|x| < r$, so könnte man eine allgemeine Eigenschaft der ganzen Funktionen kurz ausdrücken, wie folgt: *Die Funktion* $n(r;\, z)$ *wächst für* $r \to \infty$ *nicht schneller als die Funktion* $\log M(r)$. Den präzisen Inhalt dieser Aussage, die am einfachsten als eine Folgerung des bekannten Jensenschen Satzes [1] gewonnen wird, gibt im Falle einer ganzen Funktion, deren Ordnung

$$\text{(a)} \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

endlich ist, der sogenannte *erste Satz von* Hadamard [2]:

Die Ordnung (a) der Größe $\log M(r)$ ist nicht niedriger als die Ordnung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r;\, z)}{\log r}$$

der Anzahlsfunktion $n(r;\, z)$.

In dieser Weise werden also die Anzahlsfunktionen $n(r;\, z)$ durch den Logarithmus des Maximalbetrages *nach oben* beschränkt. Es entsteht nun weiter die Frage, ob dann die Größen $n(r;\, z)$ bei gegebenem Maximalmodul *beliebig langsam* wachsen können. Faßt man nur *einen* Funktionenwert z, etwa den Wert $z = 0$, ins Auge, so bleiben in dieser Richtung tatsächlich alle Möglichkeiten offen: denn es existieren ja ganze Funktionen, für welche die Größe $n(r;\, 0)$ sogar identisch verschwindet, d. h. die den Wert Null in der ganzen endlichen Ebene überhaupt nicht annehmen. Anders verhält sich die Sache schon, wenn man *zwei* Werte z ins Auge faßt: hier setzt der Picardsche Satz [3] ein, nach welchem eine ganze Funktion, die sich nicht auf eine Konstante reduziert, *höchstens einen einzigen endlichen Wert ausläßt.* Einen solchen Wert z, der also von der Funktion überhaupt nicht angenommen wird, werden wir im folgenden *einen* PICARD*schen Ausnahmewert* der betreffenden Funktion nennen.

BOREL [4] hat eine äußerst wichtige Verallgemeinerung des PICARDschen Satzes gegeben, indem er für Funktionen von endlicher Ordnung folgendes gezeigt hat: *die Größe* $n(r; z)$ *ist genau von derselben Ordnung, wie* $\log M(r)$, *für jedes endliche* z, *außer möglicherweise einem einzigen Wert, für welchen sie von niedrigerer Ordnung sein kann.* Diesem PICARD-BORELschen Satze, den BLUMENTHAL [5] zuerst auf ganze Funktionen unendlicher Ordnung erweitert hat, schließt sich eine ganze Reihe von Untersuchungen an, wo die Ergebnisse, auf die oben kurz hingewiesen worden ist, weiter verallgemeinert und verschärft worden sind.

Es sei nun $f(x)$ eine *meromorphe* Funktion, d. h. eine in der ganzen endlichen Ebene eindeutige analytische Funktion, die daselbst keine anderen Singularitäten als eventuelle isolierte Pole besitzt. Man nehme zunächst an, daß $f(x)$ einen PICARDschen Ausnahmewert hat, d. h. daß ein Wert a existiert, der von der Funktion überhaupt nicht angenommen wird. Wenn $a = \infty$ ist, so ist $f(x)$ eine ganze Funktion; ist wiederum a endlich, so ist $\frac{1}{f(x)-a}$ eine ganze Funktion: Man kann daher sagen, daß die Theorie der ganzen Funktionen *die Theorie derjenigen meromorphen Funktionen ausmacht, welche einen Picardschen Ausnahmewert besitzen.*

Betrachtet man die Sache von diesem Standpunkt aus, so erscheint es, wenn man einmal die Untersuchung der Verteilung und Dichtigkeit der Wurzeln der Gleichung $f(x) = z$ als eine der Hauptaufgaben der Theorie ansieht, wünschenswert sich von der einschränkenden Annahme der Existenz eines PICARDschen Ausnahmewertes frei zu machen. Es entsteht aber sogleich eine Schwierigkeit, wenn man zum Gegenstand der Untersuchung eine ganz allgemeine meromorphe Funktion nimmt. In der Theorie der ganzen Funktionen bestand das Problem in der Frage nach den Relationen, durch welche das Wachstum der Größe $\log M(r)$ mit dem Anwachsen der Anzahlsfunktionen $n(r; z)$ verknüpft ist. Ist aber $f(x)$ eine meromorphe Funktion, so verliert die erstgenannte Fundamentalgröße $\log M(r)$ ihre frühere einfache Eigenschaft, eine *wachsende, endliche* Funktion von r zu sein, und ist nicht mehr geeignet, das Anwachsen der meromorphen Funktion zu charakterisieren. Überhaupt scheint der ganze *Begriff des Anwachsens* einer Funktion seinen Sinn zu verlieren. Und derselben Schwierigkeit begegnet man, wenn man das Verhalten der Funktion gegenüber einem *endlichen* Wert z untersuchen will, indem man die Funktion $\frac{1}{f(x)-z}$ statt $f(x)$ betrachtet.

In seinem Werke „*Leçons sur les fonctions méromorphes*" ist Borel [6] dieser Schwierigkeit dadurch aus dem Wege gegangen, daß er die Untersuchung der meromorphen Funktionen auf die Theorie der ganzen Funktionen zurückzuführen versucht hat, und zwar in folgender Weise: Wenn $f(x)$ eine meromorphe Funktion ist, so bilde man mittels ihrer Pole ein Weierstrasssches kanonisches Produkt $G(x)$ von möglichst niedrigem Geschlecht. Das Produkt $f(x)\,G(x) = H(x)$ ist dann eine ganze Funktion, und man hat also für die meromorphe Funktion $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = \frac{H(x)}{G(x)}. \tag{b}$$

Die *Ordnung* von $f(x)$ wird als die größere der Ordnungen der ganzen Funktionen H und G definiert. Mittels dieser Darstellung hat Borel den oben besprochenen Picard-Borelschen Satz dahin verallgemeinert, daß die Größe $n(r; z)$ bei einer meromorphen Funktion von *endlicher* Ordnung von derselben Ordnung wie die Funktion selbst ist und zwar für jedes z außer höchstens *zwei* Ausnahmewerten, für welche sie von niedrigerer Ordnung sein kann (hierbei wird selbstverständlich auch der Wert $z = \infty$ berücksichtigt).

Abgesehen davon, daß die Darstellung (b) nur bei Funktionen, bei welchen die Polanzahl $n(r; \infty)$ von *endlicher* Ordnung ist, durch die obige Vorschrift *eindeutig* definiert wird, leidet das Borelsche Verfahren an dem Übelstand, daß die Klassifikation der meromorphen Funktionen auf Grund einer willkürlich gewählten Darstellungsform geschieht und nicht, wie in der Theorie der ganzen Funktionen, auf die *inneren Eigenschaften* der Funktionen basiert ist. Es fehlt vor allem ein Kriterium dafür, für welche meromorphen Funktionen der Zähler H in (b) von *endlichem Geschlechte* ist, also ein Analogon des Hadamardschen Satzes, nach dem eine ganze Funktion von *endlicher Ordnung* auch immer von *endlichem Geschlechte* ist, ein Satz, der als eines der wichtigsten Ergebnisse der Theorie der ganzen Funktionen betrachtet werden muß. Es dürfte unseres Erachtens schwer sein, von der Darstellung (b) ausgehend zu einer allgemeinen Theorie der meromorphen Funktionen zu gelangen.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, eine *allgemeine Theorie der meromorphen Funktionen* zu entwickeln. Aus den obigen Bemerkungen ist schon hervorgegangen, daß man hierbei genötigt ist, die Fundamentalgröße $\log M(r)$ aufzugeben und durch neue Hilfsgrößen zu ersetzen. Diese neuen

Fundamentalgrößen ergeben sich aber in natürlicher Weise, wenn man bei der Untersuchung meromorpher Funktionen nicht eine Darstellung einer solchen Funktion als Quotient von zwei ganzen Funktionen zum Ausgangspunkt wählt, sondern als Hilfsmittel und funktionentheoretische Grundlage die allgemeine Integralformel

$$\text{(A)} \qquad \log f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\vartheta})| \frac{re^{i\vartheta}+x}{re^{i\vartheta}-x}\,d\vartheta - \sum_{|a_\mu|<r} \log\frac{r^2-\bar{a}_\mu x}{r(x-a_\mu)} + \sum_{|b_\nu|<r} \log\frac{r^2-\bar{b}_\nu x}{r(x-b_\nu)} + i\cdot\text{Const.}$$

benutzt, wo eine innerhalb des Kreises $|x| \leqq r$ eindeutige, meromorphe Funktion $f(x)$ durch die Randwerte ihres absoluten Betrages und durch ihre in diesem Kreise gelegenen Nullstellen a_μ und Pole b_ν dargestellt wird. Diese Formel, die in

$$\text{(A')} \qquad \log|f(te^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\vartheta})| \frac{r^2-t^2}{r^2+t^2-2rt\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta - \sum_{|a_\mu|<r} \log\left|\frac{r^2-\bar{a}_\mu x}{r(x-a_\mu)}\right| + \sum_{|b_\nu|<r} \log\left|\frac{r^2-\bar{b}_\nu x}{r(x-b_\nu)}\right|$$

übergeht [1], wenn man $x = te^{i\varphi}$ setzt und auf beiden Seiten den reellen Teil nimmt, haben F. Nevanlinna und der Verfasser in letzter Zeit zur Untersuchung verschiedener funktionentheoretischer Probleme angewandt. Wir nennen sie *die* Poisson-Jensen*sche Formel*; wenn $f(x)$ im Kreise $|x| < r$ regulär und von Null verschieden ist, reduziert sie sich nämlich auf die Poissonsche Integraldarstellung der regulär harmonischen Funktion $\log|f(x)|$ durch ihre Randwerte, während sie andererseits für $x = 0$ in die bekannte Jensensche Formel

$$\text{(B)} \qquad \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta - \sum_{|a_\mu|<r} \log\frac{r}{|a_\mu|} + \sum_{|b_\nu|<r} \log\frac{r}{|b_\nu|}$$

übergeht.

Um den Inhalt dieser letzten Beziehung klar hervortreten zu lassen, führen

[1] Wenn $f(x)$ auf dem Rande Γ und innerhalb eines zusammenhängenden Gebietes G eindeutig und meromorph ist, so gilt allgemein für $|f(x)|$ die Darstellung:

$$\text{(A'')} \qquad \log|f(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f(\xi)| \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial n}\,ds + \sum_G g(x, b_\nu) - \sum_G g(x, a_\mu),$$

wo $g(\xi, x)$ die Greensche Funktion von G mit ihrem Pole im Punkte $\xi = x$ bezeichnet. Ist G ein Kreis $|x| \leqq r$, so geht (A'') in (A') über.

wir folgende Bezeichnungen ein: Zunächst sei, falls z eine gegebene komplexe Zahl ist, $m(r;z)$ der Mittelwert

$$m(r;z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\vartheta})-z}\right| d\vartheta,$$

wo $\overset{+}{\log} t$ die Zahl $\log t$ oder Null bezeichnet, je nachdem $t > 1$ oder $0 \leqq t \leqq 1$ ist; für $z = \infty$ soll in dem Integranden $\frac{1}{f-z}$ durch f ersetzt werden. Ferner sei

$$N(r;z) = \int_0^r \frac{n(t;z)}{t}\,dt = \sum_{r_\nu < r} \log\frac{r}{r_\nu(z)},$$

wo $r_\nu(z)$ die absoluten Beträge und $n(r;z)$, wie vorher, die Anzahl der z-Stellen der Funktion im Kreise $|x| < r$ bezeichnen. Mit diesen Bezeichnungen nimmt die Jensensche Formel die einfache Gestalt an[1]:

(B′) $$m(r;\infty) + N(r;\infty) = m(r;0) + N(r;0) + \log|f(0)|.$$

Mittels der Poisson-Jensenschen und der spezielleren Jensenschen Formel kann man nun den nachstehenden Satz beweisen, den wir wegen der grundlegenden Bedeutung desselben für die ganze Theorie *den ersten Hauptsatz* nennen:

Zu jeder meromorphen Funktion $f(x)$ gehört eine reelle Funktion $T(r)$ von folgenden Eigenschaften:

1° *$T(r)$ ist eine wachsende Funktion von r und eine konvexe Funktion von* $\log r$.

2° *Wenn z eine beliebige von x unabhängige, endliche oder unendliche komplexe Zahl bezeichnet, so ist*

(I) $$m(r;z) + N(r;z) = T(r) + O(1).$$

Die auf der linken Seite der Beziehung (I) stehenden zwei Glieder sind *nichtnegativ.* Das erste Glied $m(r;z)$ ist der Mittelwert der Größe $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f-z}\right|$ auf dem Kreis $|x| = r$ und erhält also wesentliche Beiträge von denjenigen Bogen dieses Kreises, auf denen der Funktionenwert f nahe an dem Wert z

---

[1] Wenn $x = 0$ eine $n_0(z)$-fache z-Stelle von $f(0)$ ist, so sei

$$N(r;z) = \int_0^r \frac{n(t;z) - n_0(z)}{t}\,dt + n_0(z)\log r.$$

Ist z. B. $f(0) = 0$, so wenden wir die Jensensche Formel auf die Funktion $\frac{f(x)}{x^{n_0(0)}} = \bar{f}(x)$ an und erhalten

(B″) $$m(r;\infty) + N(r;\infty) = m(r;0) + N(r;0) + \log|\bar{f}(0)|.$$

liegt; man könnte daher sagen, daß $m(r; z)$ ein Maß für die Stärke der mittleren Konvergenz der Funktion $f(x)$ gegen den Wert z für $r \to \infty$ angibt. Das zweite Glied $N(r; z)$ bestimmt wiederum, wie dicht diejenigen Punkte liegen, in denen die Funktion den betreffenden Wert z tatsächlich annimmt. Die Summe $m(r; z) + N(r; z)$ könnte man deshalb als die „z-Komponente" in der Variation der meromorphen Funktion für $|x| \to \infty$ bezeichnen: sie charakterisiert sozusagen die Stärke der Affinität, welche die Funktion zu dem komplexen Wert z besitzt. Der erste Hauptsatz drückt nun aus, daß sämtliche z-Komponenten einer meromorphen Funktion gleich stark sind; je zwei von ihnen halten einander für $r \to \infty$ im Gleichgewicht, derart daß ihre Differenz für jedes r beschränkt ist. Diese schon an sich bemerkenswerte Symmetrieeigenschaft der meromorphen Funktionen ist für die ganze Theorie von fundamentaler Wichtigkeit.

Die Klassifikation der meromorphen Funktionen geschieht nun in natürlicher Weise auf Grund des asymptotischen Verhaltens der Fundamentalgröße $T(r)$: wir definieren die *Ordnung* einer gegebenen Funktion als die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

Diese Definition ist im Falle einer *ganzen* Funktion $f(x)$ mit der gewöhnlichen Erklärung äquivalent, denn die Größen $T(r)$ und $\log M(r)$ sind dann von derselben Größenordnung.

Das asymptotische Verhalten der Fundamentalgröße $T(r)$ ist für die Eigenschaften der betreffenden meromorphen Funktion $f(x)$ von ausschlaggebender Bedeutung. Es gelten u. a. folgende Sätze:

1⁰ *Wenn* $T(r) = O(1)$, *so reduziert sich* $f(x)$ *auf eine Konstante.*

2⁰ *Wenn* $T(r) = O(\log r)$, *so reduziert sich* $f(x)$ *auf eine rationale Funktion.*

3⁰ *Wenn* $T(r) = O(r^\lambda)$, *wo* λ *eine endliche Zahl ist (d. h. wenn* $f(x)$ *höchstens von der endlichen Ordnung* λ *ist), so ist*

$$f(x) = x^\alpha e^{P_k(x)} \frac{\Pi_1(x)}{\Pi_2(x)},$$

wo α *eine ganze Zahl ist,* P_k *ein Polynom vom Grade* $k \leqq \lambda$ *bezeichnet und* Π_1, Π_2 WEIERSTRASS*sche kanonische Produkte sind, deren Geschlechter nicht höher als* λ *sind.*

Dieser letzte Satz enthält als speziellen Fall den HADAMARDschen Satz, nach welchem das Geschlecht einer ganzen Funktion höchstens gleich der Ordnung der Funktion ist.

Diese drei Sätze sind alle leichte Folgerungen aus der POISSON-JENSENschen Formel. Im Zusammenhang mit dem ersten Hauptsatz entstehen aber in natürlicher Weise einige weitere Fragen, die Anlaß zu bedeutend tieferliegenden und schwierigeren Betrachtungen geben. Gemäß dem ersten Hauptsatz bleibt die Summe

$$m(r;z)+N(r;z)$$

bei veränderlichem z *invariant* (von einem für jedes r *beschränkten* Gliede abgesehen); was läßt sich nun weiter über die Stärke der *einzelnen* „Teilkomponenten" m und N aussagen? Mit dieser Frage befinden wir uns in dem PICARDschen Ideenkreise: in der Tat ist der PICARDsche Satz, nach welchem das zweite Glied $N(r;z)$ höchstens für *zwei* verschiedene Werte z identisch verschwinden kann, als ein erstes Ergebnis in dieser Richtung zu betrachten. Mittels einer Methode, welche sich ebenfalls auf die Anwendung der POISSON-JENSENschen Formel gründet, leiten wir einen allgemeinen Satz ab, der die Erscheinungen in der Richtung des PICARDschen Satzes beherrscht. Dieser *zweite Hauptsatz*, wie wir ihn nennen, kann in folgender Weise ausgesprochen werden:

Es seien $f(x)$ eine beliebige meromorphe Funktion, $T(r)$ die zu ihr gehörige Fundamentalgröße und a, b, c drei von einander verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen. Dann besteht die Ungleichung

$$\text{(II)} \qquad T(r) < N(r;a)+N(r;b)+N(r;c)-N_1(r)+S(r),$$

wo die Glieder N_1 und S folgende Bedeutung haben:

1^0 *$N_1(r)$ wird durch die* m u l t i p l e n *Stellen der Funktion gebildet nach folgender Vorschrift:*

Man bilde die Anzahl $n_1(r)$ der mehrfachen Stellen von $f(x)$ in dem Kreise $|x| < r$ in der Weise, daß eine m-fache Stelle nur $(m-1)$-mal gezählt wird; dann ist

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt.$$

2^0 *Das Restglied $S(r)$ genügt der Ungleichung*

$$S(r) < O(\log T(r))$$

außer möglicherweise, im Falle einer Funktion von unendlicher Ordnung, für eine Wertmenge r von endlichem Gesamtmaß.

Dieser Satz, der als unmittelbare Folgerung den PICARDschen Satz enthält, leitet unschwer zu einer ganzen Reihe von Ergebnissen, die über die oben gestellte Frage: über das asymptotische Verhalten der einzelnen Fundamentalgrößen m und N Aufschluß geben. Unsere Sätze enthalten, wenn sie insbesondere auf ganze Funktionen angewandt werden, die wesentlichsten bis jetzt bekannten Resultate innerhalb des PICARDschen Fragenkreises, zum größten Teil in erweiterter und verschärfter Form. Durch diese Ergebnisse wird insbesondere der PICARD-BORELsche Satz, nach dem eine meromorphe Funktion höchstens *zwei Ausnahmewerte* haben kann, für welche die Wurzeln der Gleichung $f(x) = z$ mit exzeptionell kleiner Dichte vorhanden sind, auf eine im gewissen Sinne endgültige Form gebracht; durch Beispiele läßt es sich nämlich zeigen, daß die Definitionen eines Ausnahmewertes, die wir geben, nicht mehr verschärft werden können.

Die Sätze, welche wir in der obigen kurzen Übersicht besprochen haben, beziehen sich auf die *asymptotischen* Eigenschaften einer meromorphen Funktion, und es scheint deshalb von vornherein klar zu sein, daß die Voraussetzung, daß die betrachtete analytische Funktion in der *ganzen* endlichen Ebene meromorph sei, nicht wesentlich sein kann. Tatsächlich lassen sich die in unserer Arbeit angewandten Hilfsformeln so erweitern, daß sie auch dann anwendbar sind, wenn die zu untersuchende Funktion nur in einer gewissen Umgebung des Unendlichkeitspunktes meromorph ist; die Anwendung dieser erweiterten Formeln führt zu dem Ergebnis, daß die oben erörterten Sätze auch in dem fraglichen allgemeineren Fall (teilweise in unwesentlich modifizierter Form) gültig sind. Diese Sätze enthalten demnach die Grundzüge einer Theorie der Wertverteilung einer in der Umgebung eines *isolierten* singulären Punktes eindeutigen analytischen Funktion, wobei diese singuläre Stelle selbstverständlich nicht in dem Unendlichkeitspunkt zu liegen braucht.

Es dürfte aus dem oben Angeführten hervorgegangen sein, daß man bei der Untersuchung der Wertverteilung der Gleichung $f = z$ keine Ursache hat, die einschränkende Annahme der Existenz eines Picardschen Ausnahmewertes aufrechtzuhalten; vielmehr verleiht die Theorie der *meromorphen* Funktionen auch der spezielleren Theorie der ganzen Funktionen eine gewisse Symmetrie, die letzterer vielleicht in einigen Hinsichten fehlte. Unser Ausgangspunkt bei der Untersuchung der meromorphen und ganzen Funktionen: die Anwendung der allgemeinen Integralformel (A) und der Hilfsgrößen m und N, die sich in organischer Weise dieser Formel anschließen, gewährt aber einen weiteren bedeutenden Vorteil, auf den wir noch mit einigen Worten aufmerksam machen wollen.

Es zeigt sich, daß ein großer Teil der Ergebnisse, auf welche oben hingewiesen worden ist, in unwesentlich modifizierter Form und mit fast unveränderter Begründung auch für Funktionen bestehen, die nur in einem *endlichen* Kreise, z. B. für $|x| < 1$, eindeutig und meromorph sind. In unveränderter Form gilt zunächst auch hier *der erste Hauptsatz*. Die innerhalb des Einheitskreises meromorphen Funktionen zerfallen in zwei Hauptklassen, je nachdem die Fundamentalgröße $T(r)$ für $r \to 1$ beschränkt ist oder unbeschränkt wächst. Die erstgenannte Funktionsklasse zeichnet sich durch eine bemerkenswerte Eigenschaft aus: es gilt nämlich der Satz, daß sie identisch ist mit der Klasse derjenigen meromorphen Funktionen, welche sich als Quotient von zwei innerhalb des Einheitskreises *beschränkten* analytischen Funktionen darstellen lassen.

Der zweite Hauptsatz behält ebenfalls seine Gültigkeit; wir beweisen, daß das Restglied $S(r)$ in der Ungleichung (II), wie im Falle einer in der ganzen Ebene meromorphen Funktion, im allgemeinen von niedrigerer Größenordnung als die Fundamentalgröße $T(r)$ ist. Im Falle einer Funktion, die im Einheitskreise von *endlicher* Ordnung ist, d. h. für welche $T(r)$ nicht schneller als eine endliche Potenz des Ausdrucks $\frac{1}{1-r}$ wächst, finden wir die Abschätzung

$$S(r) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right).$$

Aus der Ungleichung (II) schließt man dann leicht, daß der Picardsche Satz und seine Verallgemeinerungen, nach welchen die Punkte, in denen eine meromorphe Funktion einen Wert z annimmt, mit einer für *alle* Werte z *konstanter Dichtigkeit* auftreten, außer möglicherweise für *zwei* Ausnahmewerte, für welche sie anormal klein sein kann, auch für jede innerhalb des Einheitskreises meromorphe Funktion gültig sind, sobald die Fundamentalgröße $T(r)$ von *höherer Größenordnung* als das Restglied ist, d. h. sobald

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty$$

ist. Mit dieser Bedingung haben wir die *wahre Gültigkeitsgrenze* der dem Picardschen Fragenkreis zugehörigen Sätze gefunden, denn es existieren Funktionen — eine solche ist die Modulfunktion —, welche im Einheitskreise *drei* verschiedene Werte auslassen und bei denen die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

positiv ist.

Die vorliegende Arbeit ist in vier Abschnitte eingeteilt. Im ersten Abschnitt wird der erste Hauptsatz hergeleitet; ferner wird mittels dieses Satzes und der POISSON-JENSENschen Formel ein allgemeiner Satz über meromorphe Funktionen endlicher Ordnung bewiesen, der im Falle einer ganzen Funktion eine Synthese aus dem sogenannten *ersten* und *zweiten* HADAMARD*schen Satz* enthält. Im zweiten Abschnitt wird die *kanonische Darstellung* einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung hergeleitet und von dieser Darstellung ausgehend einige weitere Sätze über die asymptotischen Eigenschaften meromorpher Funktionen nicht ganzzahliger Ordnung bewiesen. Ferner wird der Begriff des *Geschlechtes* eingeführt und werden einige Sätze über die Beziehungen zwischen der Ordnung und dem Geschlecht einer meromorphen Funktion gegeben, welche als spezielle Fälle die entsprechenden, bekannten Sätze in der Theorie der ganzen Funktionen enthalten. Der dritte Abschnitt enthält den zweiten Hauptsatz und Anwendungen desselben auf Fragen, die im Zusammenhang mit dem PICARDschen Satze stehen. Der vierte und letzte Abschnitt ist schließlich den Funktionen gewidmet, die *innerhalb des Einheitskreises* eindeutig und meromorph sind.

I. Der erste Hauptsatz.

1. *Definition und einige Eigenschaften der Größen $m(r;z)$ und $N(r;z)$.* Es sei $f(x)$ eine in der ganzen endlichen komplexen x-Ebene eindeutige, meromorphe Funktion, und z eine von x unabhängige, endliche oder unendliche komplexe Zahl. Um das asymptotische Verhalten der Funktion $f(x)$ gegenüber diesem Wert z zu untersuchen, empfiehlt es sich nachstehende, teilweise schon in der Einleitung erwähnte Bezeichnungen und Definitionen einzuführen:

Es sei zunächst $m\left(r, \frac{1}{f-z}\right)$ der Mittelwert

$$m\left(r, \frac{1}{f-z}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})-z}\right| d\varphi, \tag{1}$$

wo man $f-z$ durch $\frac{1}{f}$ zu ersetzen hat, falls $z=\infty$; wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir kürzer auch

$$m\left(r, \frac{1}{f-z}\right) \equiv m(r;z)$$

schreiben. Dieser Mittelwert ist nach der Definition des Zeichens $\overset{+}{\log}$ eine nichtnegative Größe. Wesentliche Beiträge erhält er nur von denjenigen Segmenten des Kreises $|x|=r$, auf denen die Differenz $f-z$ klein ist. Man kann daher sagen, daß $m(r;z)$ bei wachsendem r ein Maß für die Stärke der mittleren Konvergenz der meromorphen Funktion gegen den Wert z angibt.

Es sei ferner, falls $f(0) \neq z$ ist,

$$N\left(r, \frac{1}{f-z}\right) \equiv N(r;z) = \int_0^r \frac{n(t;z)}{t}\,dt = \log\frac{r^{n(r;z)}}{r_1 r_2 \ldots r_{n(r;z)}}, \tag{1'}$$

wo $n(r;z)$ die Anzahl der innerhalb des Kreises $|x|<r$ gelegenen z-Stellen der Funktion $f(x)$ bezeichnet. Wenn $f(0)=z$ ist, so wird dieses Integral unendlich; es ist dann aus mehreren Gründen zweckmäßig, die obige Erklärung durch

$$N(r;z) = \int_0^r \frac{n(t;z)-n_0(z)}{t}\,dt + n_0(z)\log r = \log\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_{n-n_0}} \tag{1''}$$

zu ersetzen, wobei $n_0(z)$ die Multiplizität der im Nullpunkte gelegenen z-Stelle der Funktion $f(x)$ bedeutet, und $r_1, r_2, \ldots$ die absoluten Beträge der innerhalb des Kreises $|x| < r$ gelegenen, von Null verschiedenen z-Stellen bezeichnen.

Die Größe $N(r; z)$ wird durch die Anzahl und Verteilung derjenigen Punkte in dem Kreise $|x| < r$ bestimmt, in denen der Wert z von der Funktion $f(x)$ tatsächlich angenommen wird; sie charakterisiert also bei wachsendem r die Dichte der z-Stellen der betrachteten meromorphen Funktion.

Die Summe

$$m(r;\, z) + N(r;\, z) \tag{2}$$

wird in der nachfolgenden Untersuchung eine fundamentale Rolle spielen. In dieser Nummer werden zunächst zwei wichtige Eigenschaften dieses Ausdruckes bewiesen:

Satz 1. — *Die Summe* (2) *ist eine wachsende Funktion von* r.

Wir führen den Beweis zunächst für den Wert $z = \infty$. Setzt man

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} U_\varrho(x, f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(\varrho e^{i\vartheta})| \dfrac{\varrho^2 - t^2}{\varrho^2 + t^2 - 2\varrho t \cos(\vartheta - \varphi)}\, d\vartheta, \quad (x = te^{i\varphi}), \\[2ex] V_\varrho(x, f) = \displaystyle\sum_{|b_\nu| < \varrho} \log\left|\dfrac{\varrho^2 - \bar{b}_\nu x}{\varrho(x - b_\nu)}\right|, \end{cases}$$

wo $b_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ die Pole von $f(x)$ sind, so läßt sich die Formel (A') der Einleitung schreiben, wie folgt:

$$\log|f(x)| = U_\varrho(x, f) + V_\varrho(x, f) - U_\varrho\left(x, \frac{1}{f}\right) - V_\varrho\left(x, \frac{1}{f}\right).$$

Hier sind die Ausdrücke U_ϱ und V_ϱ nichtnegativ, und es ist also für $r < \varrho$

$$\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})| \leqq U_\varrho(re^{i\varphi}, f) + V_\varrho(re^{i\varphi}, f).$$

Durch Multiplikation mit $d\varphi$ und Integration ergibt sich demnach, daß

$$m(r;\, \infty) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\varrho(re^{i\varphi}, f)\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\varrho(re^{i\varphi}, f)\, d\varphi.$$

Nach dem Gaussschen Mittelwertsatze ist nun

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\varrho(re^{i\varphi}, f)\, d\varphi = U_\varrho(0, f) = m(\varrho;\, \infty),$$

und, da die Funktion $V_\varrho - V_r$ für $|x| < r$ regulär harmonisch ist und auf dem Kreise $|x| = r$ die Randwerte V_ϱ annimmt,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\varrho(re^{i\varphi}, f)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (V_\varrho - V_r)\, d\varphi = (V_\varrho - V_r)_{x=0} = N(\varrho; \infty) - N(r; \infty).$$

Es ist folglich

$$m(r; \infty) \leqq m(\varrho; \infty) + N(\varrho; \infty) - N(r; \infty),$$

oder also

$$m(r; \infty) + N(r; \infty) \leqq m(\varrho; \infty) + N(\varrho; \infty)$$

für $r < \varrho$.

Hiermit ist unser Satz für den Wert $z = \infty$ nachgewiesen. Um den Beweis für einen endlichen Wert z zu erbringen, hat man in der obigen Überlegung nur f durch $\dfrac{1}{f - z}$ zu ersetzen.

Ferner gilt folgender

Satz 2. — *Die Summe* (2) *ist eine nach unten konvexe Funktion von* $\log r$.

Es genügt wieder den Beweis für den Wert $z = \infty$ zu führen. Hierzu wählen wir zwei beliebige positive Zahlen r_1 und r_2 $(r_1 < r_2)$ und wenden die Formel (A″) (vgl. die Fußnote S. 5) auf die meromorphe Funktion $f(x)$ in dem von den Kreisen $|x| = r_1$ und $|x| = r_2$ begrenzten Kreisring G an. Man findet so für $r_1 < |x| < r_2$

$$\log|f(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f(\xi)| \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial n}\, ds + \sum_G g(x, b_\nu) - \sum_G g(x, a_\mu),$$

wo g die Greensche Funktion von G ist, und das Integral über die Randkreise Γ, die Summen über die in G gelegenen Pole b_ν bzw. Nullstellen a_μ erstreckt werden sollen. Da g und $\dfrac{\partial g}{\partial n}$ nichtnegativ sind, so folgt, daß

$$\overset{+}{\log}|f(x)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \overset{+}{\log}|f(\xi)| \frac{\partial g(\xi, x)}{\partial n}\, ds + \sum_G g(x, b_\nu) \equiv U(x),$$

und also

(a)
$$m(r;\infty) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

für $r_1 \leqq r \leqq r_2$.

Andererseits findet man, da $V_r(re^{i\varphi}, f) = 0$, durch Anwendung des Gaussschen Mittelwertsatzes, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_{r_2}(re^{i\varphi}, f)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(V_{r_2} - V_r)\,d\varphi = (V_{r_2} - V_r)_{x=0} = N(r_2;\infty) - N(r;\infty),$$

woraus für $N(r;\infty)$ der Wert

(b)
$$N(r;\infty) = N(r_2,\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_{r_2}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bigl(N(r_2;\infty) - V_{r_2}(re^{i\varphi}, f)\bigr)\,d\varphi$$

folgt.

Durch Addition von (a) und (b) erhalten wir nun

(c)
$$m(r;\infty) + N(r;\infty) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

wo wir zur Abkürzung

$$W(x) = U(x) - V_{r_2}(x, f) + N(r_2;\infty)$$

gesetzt haben. $W(x)$ ist eine im Kreisring G regulär harmonische Funktion; mittels der Laplaceschen Gleichung $\varDelta W = 0$ schließt man hieraus leicht, daß der Mittelwert rechts in (c) eine *lineare* Funktion von $\log r$ ist. Für $r = r_1$ und $r = r_2$ kann sein Wert leicht berechnet werden: Auf dem Kreise $|x| = r_1$ ist $U(x) = \overset{+}{\log}|f(x)| = U_{r_1}(x, f) + V_{r_1}(x, f)$ (vgl. die Formel (a) S. 13), und also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(r_1 e^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x|=r_1}(U_{r_1} + V_{r_1} - V_{r_2} + N(r_2;\infty))\,d\varphi = m(r_1;\infty) + N(r_1;\infty),$$

für $|x| = r_2$ wiederum $U = \overset{+}{\log}|f|$ und $V_{r_2} = 0$, folglich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(r_2 e^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\overset{+}{\log}\,|f(r_2 e^{i\varphi})| + N(r_2;\,\infty)\right)d\varphi = m(r_2;\,\infty) + N(r_2;\,\infty).$$

Die Ungleichung (c), wo die rechte Seite eine lineare Funktion von $\log r$ ist, geht also für $r = r_1$ und $r = r_2$ in eine Gleichheit über. Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar.

Zur Erläuterung der soeben bewiesenen Sätze sei folgende Bemerkung hinzugefügt. Von den zwei Gliedern der Summe (2) hat das zweite, $N(r;\,z)$, die Eigenschaft eine wachsende, konvexe Funktion von $\log r$ zu sein; dies ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition dieses Ausdruckes. Das erste Glied $m(r;\,z)$ besitzt dagegen im allgemeinen nicht diese Eigenschaften. So ist z. B., falls $f(x)$ ein Polynom ist, die Größe $m(r;\,0)$ sicher positiv für jedes r, das gleich dem absoluten Betrage einer Nullstelle von $f(x)$ ist, während $m(r;\,0) = 0$ für alle hinreichend großen Werte r ist. Nur wenn die Zahl z ein Picardscher Ausnahmewert von $f(x)$ ist, d. h. falls $f(x) \neq z$ für alle endliche x, kann man mit Bestimmtheit behaupten, daß auch $m(r;\,z)$ die besprochenen Eigenschaften hat; es ist nämlich dann $N(r;\,z) = 0$, und die Summe (2) reduziert sich also auf das erste Glied $m(r;\,z)$.

Daß die Summe (2) in höherem Grade als ihre einzelnen Glieder sich durch gewisse einfache Eigenschaften auszeichnet, wird sich auch in dem nachfolgenden Artikel zeigen.

2. *Invarianz der Summe $m(r;\,z) + N(r;\,z)$ bei veränderlichem z. Definition der charakteristischen Funktion $T(r)$.* — In dieser Nummer wollen wir die Beträge der Summe (2) für verschiedene Werte z vergleichen. Hierzu wählen wir eine beliebige, *endliche* Zahl a und betrachten die Funktionen $f(x)$ und $f(x) - a$. Sie haben gemeinsame Pole, und es ist also

$$N(r, f) = N(r, f - a). \tag{3'}$$

Mittels der evidenten Ungleichung

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1 + \alpha_2) \leqq \overset{+}{\log}\,\alpha_1 + \overset{+}{\log}\,\alpha_2 + \log 2 \qquad (\alpha_1 \geqq 0,\ \alpha_2 \geqq 0)$$

folgt ferner, daß einerseits

$$\overset{+}{\log}|f-a| \leqq \overset{+}{\log}(|f|+|a|) \leqq \overset{+}{\log}|f|+\overset{+}{\log}|a|+\log 2,$$

und andererseits

$$\overset{+}{\log}|f| \leqq \overset{+}{\log}(|f-a|+|a|) \leqq \overset{+}{\log}|f-a|+\overset{+}{\log}|a|+\log 2.$$

Es ist demnach

$$|m(r, f)-m(r, f-a)| \leqq \overset{+}{\log}|a|+\log 2,$$

und gemäß (3') auch

$$(3) \qquad |(m(r, f)+N(r, f))-(m(r, f-a)+N(r, f-a))| \leqq \overset{+}{\log}|a|+\log 2.$$

Man nehme jetzt an, daß $f(x)$ nicht für alle Werte x konstant ist; die LAURENTsche Entwicklung der Differenz $f-a$ in der Umgebung des Nullpunktes sei

$$f(x)-a = \frac{c_\mu}{x^\mu}+\frac{c_{\mu-1}}{x^{\mu-1}}+\cdots,$$

wo $|c_\mu| \neq 0$ angenommen wird. Es ist dann nach der JENSENschen Formel

$$m(r, f-a)+N(r, f-a) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)+N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)+\log|c_\mu|.$$

Verbindet man diese Beziehung mit der Ungleichung (3), so gelangt man zu folgendem Ergebnis, wo wir wieder von den im vorigen Artikel benutzten einfacheren Bezeichnungen der Größen m und N Gebrauch machen:

Es sei $f(x)$ eine nichtkonstante meromorphe Funktion und a eine beliebige, endliche Zahl. Dann ist

$$m(r;\infty)+N(r;\infty) = m(r;a)+N(r;a)+h(r),$$

wo $h(r)$ für jedes $r>0$ der Ungleichung

$$|h(r)| \leqq |\log|c_\mu||+\log 2+\overset{+}{\log}|a|$$

genügt; hierbei bezeichnet c_μ den ersten nichtverschwindenden Koeffizienten der Laurentschen Entwicklung der Funktion $f(x)-a$.

Es sei nun a eine ganz beliebige komplexe Zahl: wir bezeichnen die Summe (2) für diesen Wert $z=a$ kurz mit $T(r)$. Nur um eine bestimmte Wahl zu treffen, nehmen wir im folgenden $a=\infty$ an, so daß nach Definition

$$T(r) \equiv m(r;\infty)+N(r;\infty).$$

Wo zu gleicher Zeit von mehreren meromorphen Funktionen die Rede ist, wollen wir, wenn die Deutlichkeit es erheischt, auch

$$T(r, f) \text{ statt } T(r)$$

schreiben. Als Zusammenfassung unserer bisherigen Ergebnisse können wir dann folgendes aussagen:

Erster Hauptsatz. — *Zu jeder meromorphen Funktion $f(x)$, die sich nicht auf eine Konstante reduziert, gehört eine reelle Funktion $T(r)$ von nachfolgenden Eigenschaften:*

1⁰ *$T(r)$ ist eine wachsende, konvexe Funktion von* $\log r$;

2⁰ *Wenn z eine beliebige, endliche oder unendliche komplexe Zahl ist, so ist*

$$m(r; z) + N(r; z) = T(r) + O(1). \tag{I}$$

Wegen der Bedeutung dieses Ergebnisses für die ganze nachfolgende Untersuchung wollen wir seinen Inhalt etwas eingehender analysieren. Die „z-Summe" oder „z-Komponente" $m(r; z) + N(r; z)$ gibt, könnte man sagen, ein Maß für die Stärke der Anziehung, welche der komplexe Wert z auf die Funktion $f(x)$ für $r \to \infty$ ausübt. Sie setzt sich aus zwei Teilkomponenten m und N zusammen, von denen die erste die Geschwindigkeit der mittleren Konvergenz der betrachteten meromorphen Funktion gegen den Wert z angibt, die zweite wiederum bestimmt, wie dicht diejenigen Punkte liegen, in denen dieser Wert z von der Funktion tatsächlich angenommen wird. Unser Hauptsatz besagt nun, daß eine meromorphe Funktion ein äußerst symmetrisches Verhalten gegenüber allen komplexen Zahlen z aufweist: *Sämtliche z-Komponenten sind gleich stark* in dem Sinn, daß je zwei von ihnen sich nur durch ein für jedes r *beschränktes* Glied unterscheiden. Ist also bei einer gegebenen meromorphen Funktion die Dichte der z-Stellen, für ein gewisses z, exzeptionell klein oder fehlen diese vollständig (wie z. B. die Pole im Falle einer *ganzen* Funktion), so wird dieser Mangel durch eine entsprechend stärkere mittlere Konvergenz gegen diesen Wert z ersetzt; umgekehrt wird eine anormal schwache Konvergenz gegen irgendeinen Wert z durch eine größere Dichte der fraglichen z-Stellen kompensiert, so daß die ganze z-Komponente doch ihre durch die Fundamentalgröße $T(r)$ bestimmte, der betrachteten meromorphen Funktion charakteristische Stärke erreicht.

Wir wollen in diesem Zusammenhang auf einige unmittelbare Konsequenzen aus dem Hauptsatze aufmerksam machen, die uns später nützlich sein werden. Wenn $f(x)$ eine nichtkonstante Funktion ist und a eine endliche Zahl bezeichnet, so ist gemäß der Ungleichung (3)

$$T(r, f) = T(r, f-a) + O(1). \tag{4'}$$

Ferner gilt auch

$$T(r, f) = T(r, af) + O(1), \quad \text{falls } a \text{ endlich und } \neq 0 \text{ ist.} \tag{4''}$$

Zum Beweise dieser letzten Beziehung genügt es, da f und af gemeinsame Pole besitzen, zu zeigen, daß

$$m(r, f) = m(r, af) + O(1);$$

diese Gleichung ist aber eine unmittelbare Folgerung aus den Ungleichungen

$$\overset{+}{\log}|af| \leqq \overset{+}{\log}|a| + \overset{+}{\log}|f|, \quad \overset{+}{\log}|f| = \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a}\cdot af\right| \leqq \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{a}\right| + \overset{+}{\log}|af|.$$

Allgemeiner besteht nachstehendes

Korollar. — *Es seien $f(x)$ eine nichtkonstante meromorphe Funktion, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ endliche, von x unabhängige komplexe Zahlen von der Art, daß die Determinante*

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Dann ist

$$T\left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) = T(r, f) + O(1). \tag{4}$$

Falls $\gamma = 0$, so ist $\alpha \neq 0$, $\delta \neq 0$, und die Beziehung (4) ergibt sich direkt aus (4') und (4''). Ist wiederum $\gamma \neq 0$, so folgt die Behauptung durch Verbindung von (4') und (4'') mit dem Hauptsatz (I), wenn man

$$\frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma} \cdot \frac{1}{\gamma f + \delta}$$

schreibt.

Wir haben bei den obigen Überlegungen die einschränkende Voraussetzung machen müssen, daß die meromorphe Funktion $f(x)$ sich nicht auf eine Konstante reduziert; ist nämlich $f(x)$ identisch gleich einer konstanten Zahl a, so werden die Größen $m(r; a)$ und $N(r; a)$ unendlich und sind deshalb nicht mehr anwendbar. Für jedes $z \neq a$ ist wiederum $N(r; z) = 0$, $m(r; z) = \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{z-a}\right|$, und die Summe $m + N$ also konstant und *endlich*. Umgekehrt gilt der

Satz. — *Wenn die Summe $m(r;z)+N(r;z)$ für einen Wert z unter einer von r unabhängigen, endlichen Grenze liegt, so reduziert sich die zugehörige meromorphe Funktion auf eine Konstante.*

Sei $f(0)=a$; es wird also behauptet, daß $f(x)\equiv a$ ist. Im entgegengesetzten Falle könnte man nämlich nach dem Hauptsatze schließen, daß die Summe $m+N$ nicht nur für ein gewisses z, sondern für *jedes* z, also speziell für $z=a$ beschränkt wäre. Dies ist aber nicht richtig, denn das zweite Glied $N(r;a)$ wächst nach der Definition (1″) für $r\to\infty$ über alle Grenzen.

3. *Einige Beispiele. Bedeutung der Fundamentalgröße $T(r)$ im Falle einer ganzen Funktion. Definition der Ordnung einer meromorphen Funktion.* — Wir wollen in dieser Nummer zunächst die oben erörterten Verhältnisse durch einige einfache Beispiele beleuchten:

Sei $f(x)$ eine *rationale Funktion:*

$$f(x)=\frac{a_\nu x^\nu+\cdots+a_0}{b_\mu x^\mu+\cdots+b_0}=\frac{P_\nu(x)}{Q_\mu(x)},$$

wo der Zähler und Nenner teilerfremd, und die Koeffizienten a_ν und b_μ von Null verschieden angenommen werden. Man hat drei Fälle zu unterscheiden:

1° $\nu>\mu$. Dann wird

$$m(r;z)=\begin{cases}(\nu-\mu)\log r+O(1) & \text{für } z=\infty,\\ O(1) & \text{für } z\neq\infty,\end{cases}$$

$$N(r;z)=\begin{cases}\mu\log r+O(1) & \text{für } z=\infty,\\ \nu\log r+O(1) & \text{für } z\neq\infty.\end{cases}$$

2° $\nu=\mu$. Wenn α die Gradzahl des Polynoms $a_\nu Q_\mu-b_\mu P_\nu$ ist, so findet man

$$m(r;z)=\begin{cases}(\nu-\alpha)\log r+O(1) & \text{für } z=\dfrac{a_\nu}{b_\mu},\\ O(1) & \text{für } z\neq\dfrac{a_\nu}{b_\mu},\end{cases}$$

$$N(r;z)=\begin{cases}\alpha\log r+O(1) & \text{für } z=\dfrac{a_\nu}{b_\mu},\\ \nu\log r+O(1) & \text{für } z\neq\dfrac{a_\nu}{b_\mu}.\end{cases}$$

3^0 $\nu < \mu$. Es ist

$$m(r;z) = \begin{cases} (\mu-\nu)\log r + O(1) & \text{für } z = 0, \\ O(1) \text{ für } z \neq 0, \end{cases}$$

$$N(r;z) = \begin{cases} \nu \log r + O(1) & \text{für } z = 0, \\ \mu \log r + O(1) & \text{für } z \neq 0. \end{cases}$$

Man sieht also, daß für *jedes* z

$$m(r;\, z) + N(r;\, z) = \lambda \log r + O(1),$$

wo λ die größere der Zahlen ν und μ bezeichnet. Für eine rationale Funktion ist also immer $T(r) = O(\log r)$. Wir werden später finden (vgl. Nummer 1 im zweiten Abschnitt), daß auch die Umkehrung dieses Ergebnisses richtig ist.

Für $f(x) = \operatorname{tg} x$ findet man

$$m(r;\, z) = \frac{2r}{\pi} + O(1), \quad N(r;\, z) = 0 \text{ für } z = \pm i,$$

$$m(r;\, z) = O(1), \quad N(r;\, z) = \frac{2r}{\pi} + O(1) \text{ für } z \neq \pm i,$$

also $T(r) = m(r;\, z) + N(r;\, z) + O(1) = \dfrac{2r}{\pi} + O(1)$.

Sei schließlich $f(x) = e^{kx}$, wo $k > 1$. Es wird dann

$$m = \frac{kr}{\pi} + O(1), \quad N = 0 \text{ für } z = \infty,$$

$$m = \frac{r}{\pi} + O(1), \quad N = \frac{(k-1)r}{\pi} + O(1) \text{ für } z = 0,$$

$$m = O(1), \quad N = \frac{kr}{\pi} \text{ für } z \neq 0,\, \infty,$$

also für alle z: $T(r) = \dfrac{kr}{\pi} + O(1) = m(r;\, z) + N(r;\, z) + O(1)$. Der Logarithmus des Maximalmoduls $M(r) = \max\limits_{|x|=r} |f(x)|$ ist wiederum: $\log M(r) = kr$. Man sieht, daß die Ausdrücke $T(r)$ und $M(r)$ bei der betrachteten ganzen Funktion von derselben Größenordnung sind (vom Normaltypus der Ordnung Eins in der Pringsheimschen Terminologie). Wir werden im folgenden eine beliebige ganze Funktion in dieser Hinsicht untersuchen:

Wenn $f(x)$ eine *ganze Funktion* ist, so verschwindet der Ausdruck $N(r;\infty)$ identisch, und die Fundamentalgröße $T(r)$ reduziert sich auf

$$T(r) = m(r;\, \infty).$$

Nach der Definition dieses letzten Ausdruckes ist demnach $T(r) \leqq \log M(r)$. Eine Ungleichung, die etwas in umgekehrter Richtung aussagt, findet man leicht mittels der POISSON-JENSENschen Formel (A'), wonach für $0 < r < \varrho$:

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\frac{\varrho^2-r^2}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)}d\vartheta - \sum_{|a_\mu|<\varrho}\log\left|\frac{\varrho^2-\bar{a}_\mu x}{\varrho(x-a_\mu)}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(\varrho e^{i\vartheta})|\frac{\varrho^2-r^2}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)}d\vartheta \leqq \frac{\varrho+r}{\varrho-r}\,m(\varrho;\infty).$$

Man sieht folglich:

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion ist, so gilt für jedes $0 < r < \varrho$:

$$T(r) \leqq \log M(r) \leqq \frac{\varrho+r}{\varrho-r}\,T(\varrho). \tag{5}$$

In der Theorie der ganzen Funktionen wird bekanntlich *die Ordnung* einer gegebenen Funktion als die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\,\frac{\log_2 M(r)}{\log r} \tag{6}$$

definiert. Wenn die Ordnung endlich und gleich q ist, so sagt man nach PRINGSHEIM, $f(x)$ gehöre dem Maximal-, Normal- oder Minimaltypus dieser Ordnung an, je nachdem

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\,\frac{\log M(r)}{r^q}$$

unendlich, positiv endlich, oder Null ist.

Daß $f(x)$ von der Ordnung q ist, kann man offenbar auch so ausdrücken: *Das Integral*

$$\int^{\infty}\frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}}\,dr$$

ist für $\lambda > q$ konvergent, für $\lambda < q$ divergent. Für $\lambda = q$ hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem dieses Integral konvergent oder divergent ist: in jenem Fall werden wir sagen, $f(x)$ gehöre dem *Konvergenztypus* der Ordnung q an; in diesem Fall sei sie wiederum vom *Divergenztypus.*

Setzt man nun in den Beziehungen (5) $\varrho = kr$, wo $k > 1$, so folgt, daß die obere Grenze (6) gleich

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}$$

ist, und daß die Funktionen $\log M(r)$ und $T(r)$ auch demselben Typus einer gegebenen endlichen Ordnung angehören[1]. Insbesondere sind die Integrale

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}} dr \quad \text{und} \quad \int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

gleichzeitig konvergent oder divergent. In der Theorie der *ganzen* Funktionen ist es also gleichgültig, ob man bei Fragen, in denen die *Ordnung* oder der *Ordnungstypus* in Betracht kommt, die Größe $\log M(r)$ oder $T(r)$ benutzt. Da nun die Größe $\log M(r)$ in dem allgemeineren Falle einer *meromorphen* Funktion nicht mehr anwendbar ist, während $T(r)$ auch in diesem Falle alle ihre einfachen Eigenschaften behält, liegt es nahe folgende *allgemeine Erklärung* zu geben:

Definition. — *Die Zahl*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}$$

heißt die Ordnung der zugehörigen meromorphen Funktion.

Falls die Ordnung q endlich ist, so gehöre die Funktion dem *Maximal-*, *Normal-* oder *Minimaltypus* an, je nachdem

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r)}{r^q}$$

unendlich, endlich und positiv, oder gleich Null ist. Schließlich sei sie vom *Konvergenz-* oder *Divergenztypus,* je nachdem das Integral

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+1}} dr$$

konvergent oder divergent ist.

Eine Funktion vom Konvergenztypus gehört immer auch dem Minimaltypus an. Denn ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, so ist, falls das letztgeschriebene Integral konvergent ist, von einem gewissen Wert r ab

$$\varepsilon > \int_r^{\infty} \frac{T(t)}{r^{q+1}} \geqq T(r) \int_r^{\infty} \frac{dt}{r^{q+1}} = \frac{T(r)}{q r^q}.$$

---

[1] Dasselbe gilt offenbar auch für den verallgemeinerten LINDELÖFschen Ordnungsbegriff, wo Funktionen der Form $r^{\lambda} (\log r)^{\lambda_1} (\log_2 r)^{\lambda_2} \ldots (\log_k r)^{\lambda_k}$ als Vergleichsfunktionen benutzt werden.

Dieses Ergebnis läßt sich offenbar nicht umkehren: denn eine Funktion vom Minimaltypus kann auch dem Divergenztypus angehören.

Daß die obige Definition auch mit derjenigen Erklärung äquivalent ist, die von Borel [6] für den Ordnungsbegriff einer meromorphen Funktion gegeben worden ist, wird aus den Überlegungen der Nummer 3 des folgenden Abschnittes dieser Arbeit hervorgehen.

4. *Einige Eigenschaften der meromorphen Funktionen von endlicher Ordnung.* — In dieser Nummer werden wir einige Sätze über meromorphe Funktionen *endlicher* Ordnung beweisen. Wir schicken zunächst einen Hilfssatz voraus, der uns sogleich nützlich sein wird:

Hilfssatz. — *Es seien $f(x)$ eine meromorphe Funktion, und $r_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die absoluten Beträge ihrer z-Stellen. Dann sind, für ein gegebenes $\lambda > 0$, die Integrale*

$$\int^{\infty} \frac{N(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr, \quad \int^{\infty} \frac{n(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr \tag{7}$$

und die Reihe

$$\Sigma\left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^{\lambda} \tag{8}$$

gleichzeitig konvergent oder divergent.

Beweis. — Durch partielle Integration findet man, daß

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{N(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr = \frac{N(\varrho_0;z)}{\lambda\varrho_0^{\lambda}} - \frac{N(\varrho;z)}{\lambda\varrho^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{n(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr \quad (0 < \varrho_0 < \varrho), \tag{a}$$

woraus man sieht, daß das Integral

$$\int^{\infty} \frac{N(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr \tag{b}$$

konvergent ist, falls

$$\int^{\infty} \frac{n(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr \tag{c}$$

konvergiert. Ist umgekehrt jenes Integral konvergent, so ist für ein beliebiges $\varepsilon > 0$,

$$\varepsilon > \int_{\varrho}^{\infty} \frac{N(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr \geqq N(\varrho;z)\int_{\varrho}^{\infty} \frac{dr}{r^{\lambda+1}} = \frac{N(\varrho;z)}{\lambda\varrho^{\lambda}}$$

von einem gewissen Wert ϱ ab. Das zweite Glied rechts in (a) liegt also unter einer endlichen von ϱ unabhängigen Schranke, und man schließt, daß auch das Integral (c) konvergieren muß.

Mittels der Identität

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{n(r; z)}{r^{\lambda+1}} dr = \frac{n(\varrho_0; z)}{\lambda \varrho_0^\lambda} - \frac{n(\varrho; z)}{\lambda \varrho^\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{\varrho_0 \leqq r_\nu < \varrho} \left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^\lambda$$

beweist man ferner in derselben Weise, daß auch das Integral (c) und die Reihe (8) in bezug auf Konvergenz und Divergenz gleichwertig sind, womit die Behauptung nachgewiesen ist.

Wenn die Funktion $N(r; z)$ von der endlichen Ordnung r^q ist (d. h. wenn die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log N}{\log r}$$

gleich q ist), so ist das Integral (b) für $\lambda > q$ konvergent, für $\lambda < q$ divergent, und umgekehrt. Aus dem Hilfssatze folgt nun, daß auch $n(r; z)$ von derselben Ordnung r^q ist, und weiter, daß der Grenzexponent der z-Stellen gleich q ist. Ferner schließt man, daß die Größen n und N dann und nur dann dem Konvergenztypus der Ordnung r^q angehören, wenn $\lambda = q$ *Konvergenzexponent* der Reihe (8) ist [1].

Es sei nun $f(x)$ eine meromorphe Funktion und $T(r)$ die zugehörige charakteristische Funktion. Aus unserer obigen Definition folgt, daß $f(x)$ dann und nur dann von der Ordnung q ist, wenn das Integral

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr \tag{9}$$

[1] Die Funktionen n und N gehören auch derselben Lindelöfschen Ordnung $r^\lambda (\log r)^{\lambda_1} \ldots (\log_k r)^{\lambda_k}$ an, wenn $\lambda \gtrless 0$. In der Tat folgt aus der Definition

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt$$

sofort, daß N nicht von höherer Ordnung als n sein kann. Daß auch das Umgekehrte gilt, erhellt aus der Ungleichung

$$N(er) \geqq \int_r^{er} \frac{n(t)}{t} dt \geqq n(r) \int_r^{er} \frac{dt}{t} = n(r).$$

für $\lambda > q$ konvergent, für $\lambda < q$ divergent ist. Ist also $f(x)$ von *endlicher* Ordnung, so existiert eine so große endliche Zahl λ, daß das Integral sicher konvergent ist. Aus dem ersten Hauptsatz geht dann hervor, daß auch die Integrale

$$(10) \qquad \int^{\infty} \frac{m(r;z)}{r^{\lambda+1}} \quad \text{und} \quad \int^{\infty} \frac{N(r;z)}{r^{\lambda+1}}$$

für jedes z konvergent sein müssen. Aus dieser Tatsache werden wir zwei Folgesätze ableiten. Der erste folgt unmittelbar mittels des obigen Hilfssatzes:

Satz 1. — *Wenn das Integral* (9) *für ein gegebenes $\lambda > 0$ konvergent ist, so ist die Reihe*

$$(8) \qquad \Sigma \left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^{\lambda}$$

für jedes z konvergent.

Etwas schwieriger gestaltet sich der Beweis des zweiten Satzes:

Satz 2. — *Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, und*

$$M(r;z) = \max_{|x|=r} \left|\frac{1}{f(x)-z}\right|;$$

wobei für $z = \infty$ $f-z$ durch $\frac{1}{f}$ ersetzt werden soll.

Wenn das Integral (9) *für ein gegebenes $\lambda > 0$ konvergent ist, so ist das Integral*

$$(11) \qquad \int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r;z)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

für jedes z konvergent.

Aus der Voraussetzung folgt, wie schon oben hervorgehoben wurde, die Konvergenz beider Integrale (10) für *jedes z*. Um zu beweisen, daß auch das Integral (11) konvergent ist, nehmen wir eine beliebige Zahl z und wenden die Poisson-Jensensche Formel auf die Funktion $\frac{1}{f-z}$ (bzw. f, falls $z = \infty$) in einem Kreise $|x| < \varrho$ an. Sind $b_1, b_2, \ldots$ die Pole dieser Funktion, so ergibt sich die für $r < \varrho$ gültige Abschätzung

$$(12) \quad \overset{+}{\log} M(r;z) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(\varrho e^{i\vartheta})-z}\right| \frac{\varrho^2-r^2}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\vartheta + \sum_{|b_\nu|<\varrho} \log\left|\frac{\varrho^2-\bar{b}_\nu x}{\varrho(x-b_\nu)}\right|,$$

$$(x = re^{i\varphi}).$$

Hier ist, wenn $\varrho = 2r$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f-z}\right| \frac{\varrho^2-r^2}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\vartheta \leqq \frac{\varrho+r}{\varrho-r}\, m(\varrho;\, z) = 3m(2r;\, z),$$

und

$$\left|\frac{\varrho^2-\bar{b}_\nu x}{\varrho(x-b_\nu)}\right| \leqq \frac{\varrho^2+|b_\nu|r}{\varrho\,|r-|b_\nu||} \leqq \frac{2\varrho}{|r-|b_\nu||} = \frac{4r}{|r-|b_\nu||}.$$

Es folgt also aus (12), daß

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\overset{+}{\log} M(r;\, z)}{r^{\lambda+1}}\, dr \leqq 3\int_{t_0}^{t} \frac{m(2r;\, z)}{r^{\lambda+1}}\, dr + \int_{t_0}^{t} \frac{s(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr \tag{13}$$

für $0 < t_0 < t$ gilt, falls

$$s(r) = \sum_{|b_\nu| < 2r} \log \frac{4r}{|r-|b_\nu||}$$

gesetzt wird.

Nun ist zunächst

$$\int_{t_0}^{t} \frac{m(2r;\, z)}{r^{\lambda+1}}\, dr \leqq 2^\lambda \int_{t_0}^{2t} \frac{m(r;\, z)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

und wegen der Konvergenz des letzten Integrals für $t \to \infty$, auch das erste Glied rechts in (13) für jedes $t > t_0$ *beschränkt.*

Ferner findet man:

$$\sigma(r) \equiv \int_0^r s(u)\, du = \int_0^r \left(\sum_{|b_\nu| < 2u} \log\left|\frac{4u}{u-|b_\nu|}\right|\right) du = \sum_{\nu=1}^{n(2r;\, z)} \int_{\frac{|b_\nu|}{2}}^{r} \log\left|\frac{4u}{u-|b_\nu|}\right| du,$$

oder, wenn

$$I(r,\, v) = -\int_{\frac{v}{2}}^{r} \log\left|\frac{4u}{u-v}\right| du = -r\log 4r + (r-v)\log|r-v| + v\log v$$

gesetzt wird, durch partielle Integration

$$\sigma(r) = -\int_{v=0}^{2r} I(r,\, v)\, dn(v;\, z) = \int_{v=0}^{2r} n(v;\, z)\, dI(r,\, v).$$

Hier ist $dI = \log \frac{v}{|v-r|}\, dv$ negativ für $0 \leqq v < \frac{r}{2}$, positiv für $\frac{r}{2} < v \leqq 2r$, und also

$$\sigma(r) \leqq \int_{v=\frac{r}{2}}^{2r} n(v; z)\, dI \leqq n(2r; z) \int_{v=\frac{r}{2}}^{2r} dI = n(2r; z)\, r \log 8.$$

Durch partielle Integration ergibt sich nun, daß

$$\int_{t_0}^{t} \frac{s(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr = \frac{\sigma(t)}{t^{\lambda+1}} - \frac{\sigma(t_0)}{t_0^{\lambda+1}} + (\lambda+1) \int_{t_0}^{t} \frac{\sigma(r)}{r^{\lambda+2}}\, dr$$

$$\leqq \frac{n(2t; z)}{t^{\lambda}} \log 8 + (\lambda+1) \log 8 \int_{t_0}^{t} \frac{n(2r; z)}{r^{\lambda+1}}\, dr.$$

Wegen der Konvergenz des zweiten Integrals (10) ist auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{n(r; z)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

konvergent, und man schließt, daß die zwei Glieder auf der rechten Seite der zuletztgeschriebenen Ungleichung für $t \to \infty$ *beschränkt* sind.

Die behauptete Konvergenz des Integrals (11) folgt nunmehr aus der Ungleichung (13), wo die rechte Seite nach dem oben Bewiesenen unter einer endlichen von t unabhängigen Schranke liegt.

Wir machen auf folgendes Korollar des soeben bewiesenen Satzes aufmerksam:

Wenn, für ein gegebenes $\lambda > 0$, *das Integral* (9) *konvergent ist, so ist für jedes* $\varepsilon > 0$

$$\log M(r; z) < \varepsilon r^{\lambda}$$

außer möglicherweise in einer Intervallfolge, wo die Gesamtvariation von $\log r$ *beschränkt ist.*

Sei nämlich $\Delta(\varepsilon)$ diejenige Intervallfolge, wo für ein gegebenes z und ε: $\log M \geqq \varepsilon r^{\lambda}$; es ist dann

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r; z)}{r^{\lambda+1}}\, dr \geqq \int_{\Delta(\varepsilon)} \frac{\overset{+}{\log} M(r; z)}{r^{\lambda+1}}\, dr \geqq \varepsilon \int_{\Delta(\varepsilon)} d \log r, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Eine ähnliche Überlegung zeigt, daß die schärfere Ungleichung

$$\log M(r\,;\,z) < \frac{\varepsilon r^{\lambda}}{\log r \log_2 r \ldots \log_k r}$$

für jedes r gilt mit eventueller Ausnahme einer Intervallfolge, wo die gesamte Variation von $\log_{k+1} r$ endlich ist.

Wir haben gesehen, daß die Konvergenz des Integrals (9) die Konvergenz des Integrals (11) und der Reihe (8) für jedes z bewirkt. Man nehme nun umgekehrt an, daß das letztgenannte Integral und die Reihe (8) für ein gewisses z konvergent sind, dann folgt (wegen der Ungleichung $m(r\,;\,z) \leqq \overset{+}{\log} M(r\,;\,z)$) aus der Konvergenz des Integrals (11), daß das erste Integral in (10) konvergent ist, und aus der Konvergenz der Reihe, daß auch das zweite Integral (10) konvergieren muß. Mittels des Hauptsatzes schließen wir demnach, daß auch

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

konvergent ist.

Als eine Zusammenfassung der oben bewiesenen zwei Sätze können wir hiernach folgenden Satz aussprechen:

Satz — *Es seien $f(x)$ eine meromorphe Funktion, $r_{\nu}(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ die absoluten Beträge ihrer z-Stellen und*

$$M(r\,;\,z) = \max_{|x| = r} \left| \frac{1}{f(x) - z} \right|,$$

wo $f - z$ durch $\frac{1}{f}$ ersetzt werden soll, falls $z = \infty$.

Wenn dann, für ein gegebenes $\lambda > 0$, das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r\,;\,z)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

und die Reihe

$$\Sigma \left(\frac{1}{r_{\nu}(z)} \right)^{\lambda}$$

für einen Wert z beide konvergent sind, so sind sie für alle Werte z konvergent[1].

---

[1] Aus diesem Satze geht insbesondere die bemerkenswerte Tatsache hervor, daß man *die Ordnung* einer meromorphen Funktion auch auf Grund des Verhaltens des *Maximalmoduls* $M(r\,;\,z)$ für irgend einen Wert z definieren kann; es genügt aber nicht *nur* den Maximalbetrag zu betrachten:

Dieser Satz enthält nachstehende, spezielle Folgesätze:

1⁰ *Sei $f(x)$ eine ganze Funktion, r_ν die absoluten Beträge ihrer Nullstellen und $M(r)$ das Maximum ihres absoluten Betrages für $|x| = r$.*

Falls, für ein gegebenes $\lambda > 0$, das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

konvergent ist, so ist auch die Reihe

$$\Sigma \left(\frac{1}{r_\nu}\right)^{\lambda}$$

konvergent.

Dies ist der *erste* Hadamard*sche Satz* [2] in der Theorie der ganzen Funktionen in der präziseren Fassung, die ihm Valiron [7] später gegeben hat.

2⁰ *Unter der Voraussetzung des vorigen Satzes ist auch das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r;\,0)}{r^{\lambda+1}} dr$$

konvergent, und also, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl ist,

$$\left|f(re^{i\varphi})\right| > e^{-\varepsilon r^{\lambda}}$$

für jedes r, außer in einer Intervallfolge, wo die Variation von $\log r$ beschränkt ist.

Dieser Satz enthält den *zweiten* Hadamard*schen Satz* [2] über den Minimalmodul einer ganzen Funktion in der genaueren Form, in der Lindelöf [8] ihn bewiesen hat.

---

die Ordnung hängt nämlich auch von der Dichte der betreffenden z-Stellen ab, und zwar in folgender Weise:

Es sei $\bar{\lambda}$ die untere Grenze derjenigen Zahlen λ, für welche das Integral $\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r;\,z)}{r^{\lambda+1}} dr$ und die Reihe $\sum \left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^{\lambda}$ beide konvergent sind. Diese Zahl $\bar{\lambda}$ ist von z unabhängig und gleich der Ordnung der betreffenden meromorphen Funktion.

II. Kanonische Darstellung einer meromorphen Funktion von endlicher Ordnung.

1. *Darstellung einer meromorphen Funktion von endlicher Ordnung als Quotient von zwei ganzen Funktionen.* — Bis jetzt haben wir die Eigenschaften einer meromorphen Funktion direkt mittels der POISSON-JENSENschen Formel untersucht. In dieser Nummer werden wir diese Formel anwenden, um für eine Funktion von endlicher Ordnung eine in der ganzen endlichen Ebene gültige kanonische Darstellung herzuleiten, die als speziellen Fall die WEIERSTRASSsche Produktdarstellung einer ganzen Funktion von endlicher Ordnung enthalten wird. Die Methode, die hierzu benutzt wird, ist dieselbe, die F. NEVANLINNA [9] neuerdings zur Herleitung der letztgenannten Darstellung angewandt hat.

Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung, und q eine so große ganze Zahl, daß

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^{q+1}} = 0. \tag{1}$$

Die nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen und Pole von $f(x)$ seien $a_1, a_2, \ldots$ bzw. $b_1, b_2, \ldots$. Wir wählen eine beliebige positive Zahl ϱ und stellen $\log f(x)$ in dem Kreise $|x| < \varrho$ durch die POISSON-JENSENsche Formel (A) dar. Nach $(q+1)$-maliger Differentiation erhält man

$$D^{(q+1)} \log f(x) = \sum_{|a_\nu| < \varrho} \frac{(-1)^q q!}{(x-a_\nu)^{q+1}} - \sum_{|b_\mu| < \varrho} \frac{(-1)^q q!}{(x-b_\mu)^{q+1}} + S_\varrho(x) + I_\varrho(x), \tag{2}$$

wo

$$S_\varrho(x) = q! \left\{ \sum_{|a_\nu| < \varrho} \left(\frac{\bar{a}_\nu}{\varrho^2 - \bar{a}_\nu x} \right)^{q+1} - \sum_{|b_\mu| < \varrho} \left(\frac{\bar{b}_\mu}{\varrho^2 - \bar{b}_\mu x} \right)^{q+1} \right\},$$

$$I_\varrho(x) = \frac{(q+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\varrho e^{i\vartheta})| \frac{2\varrho e^{i\vartheta} d\vartheta}{(\varrho e^{i\vartheta} - x)^{q+2}}.$$

Wir werden zeigen, daß die Funktionen $S_\varrho(x)$ und $I_\varrho(x)$ in jedem endlichen Kreise $|x| \leqq r$ für $\varrho \to \infty$ gleichmäßig gegen Null streben.

Man hat zunächst für $|x| \leqq r < \varrho$

$$\left|\frac{\bar{a}_\nu}{\varrho^2 - \bar{a}_\nu x}\right| \leqq \frac{|a_\nu|}{\varrho^2 - |a_\nu| r} \leqq \frac{1}{\varrho - r},$$

und also

$$(3) \qquad \left|\sum_{|a_\nu| < \varrho} \left(\frac{\bar{a}_\nu}{\varrho^2 - \bar{a}_\nu x}\right)^{q+1}\right| \leqq \frac{n(\varrho; 0)}{(\varrho - r)^{q+1}} = \left(\frac{1}{1 - \frac{r}{\varrho}}\right)^{q+1} \frac{n(\varrho; 0)}{\varrho^{q+1}}.$$

Hier ist

$$n(\varrho; 0) = n(\varrho; 0) \int_\varrho^{e\varrho} \frac{dr}{r} \leqq \int_\varrho^{e\varrho} \frac{n(r; 0)}{r} dr \leqq N(e\varrho; 0) < T(e\varrho) + O(1),$$

und also nach der Voraussetzung (1) auch

$$\frac{n(\varrho; 0)}{\varrho^{q+1}} \to 0 \text{ für } \varrho \to \infty.$$

Die linke Seite der Ungleichung (3) strebt also im Kreise $|x| \leqq r$ gleichmäßig gegen Null, wenn ϱ unbeschränkt wächst. Die von den Polen b_μ herrührende Summe in dem Ausdruck S_ϱ läßt sich in derselben Weise abschätzen, und wir schließen also, daß die Beziehung

$$\lim_{\varrho \to \infty} S_\varrho(x) = 0$$

gleichmäßig im ganzen Kreise $|x| \leqq r$ besteht.

Für den Ausdruck I_ϱ finden wir im Kreise $|x| \leqq r$ die obere Schranke

$$|I_\varrho(x)| \leqq \frac{(q+1)!\,\varrho}{\pi(\varrho - r)^{q+2}} \int_0^{2\pi} |\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|| d\vartheta = \frac{(q+1)!}{\pi\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)^{q+2}} \cdot \frac{m(\varrho; 0) + m(\varrho; \infty)}{\varrho^{q+1}}$$

$$< \frac{2(q+1)!}{\pi\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)^{q+2}} \cdot \frac{T(\varrho) + O(1)}{\varrho^{q+1}};$$

nach (1) ist also auch

$$I_\varrho(x) \to 0 \text{ für } \varrho \to \infty,$$

und zwar gleichmäßig für $|x| \leqq r$.

Gemäß der Formel (2) gilt also für die $(q+1)$-te logarithmische Ableitung der betrachteten meromorphen Funktion die in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig konvergente Darstellung

$$D^{(q+1)}\log f(x) = (-1)^{q+1} q!\lim_{\varrho=\infty}\left\{\sum_{|b_\nu|<\varrho}\left(\frac{1}{x-b_\mu}\right)^{q+1} - \sum_{|a_\mu|<\varrho}\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right)^{q+1}\right\}.$$

Durch $(q+1)$-malige Integration ergibt sich hieraus, daß

$$\log f(x) = \sum_0^q c_\nu x^\nu + \lim_{\varrho=\infty}\left\{\sum_{|a_\mu|<\varrho}\left[\log\left(1-\frac{x}{a_\mu}\right)+\frac{x}{a_\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\mu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{x}{a_\mu}\right)^q\right]\right.$$
$$\left. - \sum_{|b_\nu|<\varrho}\left[\log\left(1-\frac{x}{b_\nu}\right)+\frac{x}{b_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b_\nu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{x}{b_\nu}\right)^q\right]\right\},$$

wo $c_\nu = [D^{(\nu)}\log f(x)]_{x=0}$.

Wir haben also folgendes Ergebnis gefunden:

Satz 1. — *Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung mit den Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ und Polen $b_1, b_2, \ldots,$ und q eine ganze Zahl von der Art, daß*

$$\lim_{r=\infty}\frac{T(r)}{r^{q+1}} = 0. \tag{1}$$

Wenn $f(0) \neq 0, \infty$ ist, so gilt die in jedem endlichen Kreise $|x| \leq r$ gleichmäßig konvergente Darstellung

$$f(x) = e^{\sum_0^q c_\nu x^\nu}\lim_{\varrho=\infty}\frac{\prod_{|a_\mu|<\varrho}\left(1-\frac{x}{a_\mu}\right)e^{\frac{x}{a_\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\mu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{x}{a_\mu}\right)^q}}{\prod_{|b_\nu|<\varrho}\left(1-\frac{x}{b_\nu}\right)e^{\frac{x}{b_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b_\nu}\right)^2+\cdots\ \frac{1}{q}\left(\frac{x}{b_\nu}\right)^q}}. \tag{4}$$

Die oben angestellten Betrachtungen lassen nicht darauf schließen, daß die in Zähler und Nenner stehenden Produkte einzeln für $\varrho \to \infty$ konvergent wären. Daß dies auch unter der Voraussetzung (1) nicht allgemein gilt, kann man durch Beispiele zeigen. Nimmt man aber an, daß die betrachtete meromorphe Funktion höchstens vom *Konvergenztypus* der Ordnung $q+1$ ist, d. h. daß das Integral

$$\int^{\infty}\frac{T(r)}{r^{q+2}}\,dr$$

konvergent ist, eine Bedingung, die für das Bestehen der Voraussetzung (1) hinreichend (nicht aber notwendig) ist, so folgt aus dem Satz 1 S. 26, daß die Reihen

$$\sum\left|\frac{1}{a_\mu}\right|^{q+1} \text{ und } \sum\left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{q+1}$$

konvergieren; dann sind die genannten unendlichen Produkte konvergent und sogar von der Reihenfolge ihrer Faktoren unabhängig. Wir haben also den

Satz 2. — *Wenn das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+2}}\, dr \tag{5}$$

konvergent ist, so gilt die Darstellung

$$f(x) = e^{\sum\limits_0^q c_\nu x^\nu} \frac{\prod\limits_1^\infty E\left(\frac{x}{a_\nu}, q\right)}{\prod\limits_1^\infty E\left(\frac{x}{b_\nu}, q\right)}, \tag{6}$$

wo E den Weierstrass*schen Primfaktor*

$$E(u, q) = (1-u)\, e^{u + \frac{1}{2}u^2 + \cdots + \frac{1}{q}u^q}$$

bezeichnet.

Unter der Voraussetzung des letzten Satzes sind die Reihen

$$\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{1+\lambda} \text{ und } \sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{1+\lambda}$$

für $\lambda = q$ konvergent. Es sei nun $\lambda = k \leqq q$ die *kleinste* nichtnegative ganze Zahl, wofür diese Reihen beide konvergieren. Dann sind die in der Formel (6) stehenden kanonischen Produkte auch dann konvergent, wenn q durch k in den Primfaktoren E ersetzt wird. Die konvergenzerzeugenden Faktoren, die hierdurch gestrichen werden, vereinigen wir mit dem vorangehenden Exponentialfaktor und finden so für $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = e^{P_h(x)} \frac{\prod\limits_1^\infty E\left(\frac{x}{a_\nu}, k\right)}{\prod\limits_1^\infty E\left(\frac{x}{b_\nu}, k\right)}, \tag{6'}$$

wo P_h ein Polynom vom Grade $h \leqq q$ ist. Wir verallgemeinern nun den Begriff des Geschlechtes einer ganzen Funktion auf meromorphe Funktionen durch nachstehende

Definition. — *Wenn eine meromorphe Funktion in der Form* (6') *dargestellt werden kann, so heißt die größere der Zahlen h und k das Geschlecht der Funktion.*

Aus dem Satz 2 folgt dann:

Satz 3. — *Das Geschlecht einer meromorphen Funktion ist nicht höher als die Ordnung derselben.*

Insbesondere ist also eine Funktion von endlicher Ordnung immer von endlichem Geschlecht; es wird später hervorgehen (N:o 3), daß auch das Umgekehrte gilt.

Es sei in diesem Zusammenhang auf eine einfache Folgerung aus der Darstellung (6′) aufmerksam gemacht. Wir haben in S. 21 gesehen, daß eine *rationale* Funktion der Bedingung $T(r) = O(\log r)$ genügt. Wir können nunmehr die Umkehrung beweisen in folgender präziseren Form:

Eine meromorphe Funktion, für welche die untere Grenze

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{T(r)}{\log r}$$

endlich ist, reduziert sich auf eine rationale Funktion.

Da $T(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist, so folgt aus der Voraussetzung zunächst, daß auch die *obere* Grenze

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{T(r)}{\log r}$$

endlich ist. Die Bedingung (5) des Satzes 2 ist hiernach für $q = 0$ erfüllt; die betrachtete meromorphe Funktion $f(x)$ läßt sich also in der Form (6) darstellen, wo der vorangehende Exponentialfaktor sich jetzt auf eine *Konstante* reduziert. Unser Satz ist also bewiesen, wenn wir noch zeigen, daß die Anzahl der Nullstellen und Pole von $f(x)$ endlich ist. Dies ist tatsächlich der Fall, denn nach dem ersten Hauptsatze ist $N(r; z) \leqq T(r) + O(1) = O(\log r)$, und also, nach der Definition des Ausdrucks N, die Größe $n(r; z)$ für jedes r beschränkt. Insbesondere sind hiernach die Nullstellen und Pole der Funktion nur in endlicher Anzahl vorhanden, w. z. b. w.

2. *Einige Eigenschaften der kanonischen Produkte.* — Um die in der vorigen Nummer gewonnene kanonische Darstellung (6) zur Untersuchung der Eigenschaften meromorpher Funktionen endlicher Ordnung anwenden zu können, brauchen wir einige Hilfssätze über das asymptotische Verhalten eines WEIERSTRASSschen kanonischen Produktes von endlichem Geschlecht. Die Eigenschaften, die für die nachfolgende Untersuchung von Bedeutung sein werden, ergeben sich sämtlich als Folgerungen des nachstehenden Hilfssatzes, der in leicht modifizierter Form eine oft angewandte Abschätzung eines kanonischen Produktes enthält:

Hilfssatz. — *Die ganze Funktion*

$$\Pi E\left(\frac{x}{a_\nu}, q\right) \tag{7}$$

vom Geschlechte q genügt der Ungleichung

$$T(r) < cr^q\left(\int_0^r \frac{N(t)}{r^{q+1}} + r\int_r^\infty \frac{N(t)}{t^{q+2}}\,dt\right) \qquad (N(t) \equiv N(t; 0)), \tag{8}$$

wo c eine von r unabhängige Zahl bezeichnet.

Wir nehmen zuerst an, daß das Geschlecht q *positiv* ist. Man gelangt dann zu (8) unter Anwendung der wohlbekannten Abschätzung

$$\log|E(u, q)| < \frac{b|u|^{q+1}}{1+|u|}, \tag{9}$$

wo b nach Denjoy [10] eine von u und q unabhängige Zahl bezeichnet. Gemäß (9) ist

$$T(r) \leqq \log M(r) < b\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r^{q+1}}{|a_\nu|^q(|a_\nu|+r)} = br^{q+1}\int_{t=0}^{\infty} \frac{dn(t; 0)}{t^q(t+r)}$$

$$= br^{q+1}\int_0^\infty \frac{qr+(q+1)t}{t^{q+1}(t+r)^2}\,n\,dt$$

$$< b(q+1)r^{q+1}\int_{t=0}^{\infty} \frac{dN(t)}{t^q(t+r)} < b(q+1)^2 r^{q+1}\int_0^\infty \frac{N(t)\,dt}{t^{q+1}(t+r)}.$$

Da ferner

$$\int_0^\infty \frac{N\,dt}{t^{q+1}(t+r)} = \int_0^r + \int_r^\infty \leqq \frac{1}{r}\int_0^r \frac{N(t)\,dt}{t^{q+1}} + \int_r^\infty \frac{N(t)\,dt}{t^{q+2}},$$

so folgt die Ungleichung (8) mit

$$c = b(q+1)^2. \tag{10}$$

Dieses Ergebnis haben wir unter der Voraussetzung $q \geqq 1$ gefunden. Im Falle $q = 0$ gelangt man aber durch eine ähnliche Rechnung zu demselben Resultat, wenn man für den Weierstrassschen Primfaktor die Abschätzung

$$\log|1-u| \leqq \log(1+|u|)$$

benutzt.

Wir haben oben angenommen, daß das Geschlecht des betrachteten kanonischen Produktes gleich q ist: es ist also nach Definition das Integral

$$\int^{\infty} \frac{N(t)}{t^{q+2}}\, dt$$

konvergent, während

$$\int^{\infty} \frac{N(t)}{t^{q+1}}\, dt$$

divergent ist. Ist also $N(r)$ von der Ordnung r^{λ}, so ist notwendigerweise

$$q \leqq \lambda \leqq q + 1.$$

Aus der Ungleichung (8) geht nun unmittelbar hervor, daß $T(r)$ nicht von höherer Ordnung als $N(r)$ sein kann; da sie aber, nach dem ersten Hauptsatze, auch nicht von niedrigerer Ordnung sein kann, so schließt man:

Bei einem kanonischen Produkte sind die Funktionen $T(r)$ und $N(r;0)$ von derselben Ordnung.

Wenn die Ordnung λ *nicht ganzzahlig* ist ($q < \lambda < q+1$), so kann man noch mehr beweisen. Eine unmittelbare Folgerung aus der Ungleichung (8) (und dem Hauptsatze (I)) ist z. B., daß $T(r)$ und $N(r)$ auch gleichzeitig dem Maximal-, Normal- oder Minimaltypus der Ordnung λ angehören. In dem letzten Fall haben wir noch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Integral

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

konvergent oder divergent ist (oder, wie wir sagen, $T(r)$ vom Konvergenz- oder Divergenztypus ist). In jenem Falle ist nach dem ersten Hauptsatze auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{N(t;0)}{t^{\lambda+1}}\, dt$$

konvergent. Die Umkehrung ist aber auch richtig, wie man leicht mittels der Ungleichung (8) beweist, indem man beide Seiten mit $\frac{dr}{r^{\lambda+1}}$ multipliziert und partiell integriert. Man gelangt so zu dem Satz von Valiron [7]:

Im Falle einer nicht ganzzahligen Ordnung gehören die Funktionen $T(r)$ und $N(r;0)$ gleichzeitig dem Konvergenz- oder Divergenztypus an.

Wir wollen noch einige Worte hinzufügen über den Fall, wo die Ordnung λ eine *ganze* Zahl ist:

Sei zunächst $\lambda = q+1$; weil das betrachtete kanonische Produkt vom Geschlechte q ist, so gehört $N(r; 0)$ notwendigerweise dem *Konvergenztypus* dieser Ordnung an. Mittels der Ungleichung (8) schließt man hieraus sofort, daß die Funktion $T(r)$ vom *Minimaltypus* sein muß; ob sie aber vom Konvergenz- oder Divergenztypus ist, läßt sich nicht entscheiden. Tatsächlich sind auch, wie man durch Beispiele zeigen kann, beide Fälle möglich: *der obige Satz von* VALIRON *besteht also nicht mehr für ganzzahlige Ordnungen.* Dieser Umstand ist von besonderer Wichtigkeit, weil daraus folgt, wie wir in der folgenden Nummer sehen werden, daß das Geschlecht einer meromorphen Funktion nicht durch ihre Ordnung eindeutig bestimmt ist, wenn diese eine ganze Zahl ist und die Funktion dem *Divergenztypus* angehört — eine Tatsache, die in der Theorie der ganzen Funktionen wohlbekannt ist.

Sei schließlich $\lambda = q$; die Funktion $N(r; 0)$ gehört dann dem Divergenztypus der betrachteten Ordnung an. Über das Verhalten der Größe $T(r)$ läßt sich in diesem Falle nichts weiter aussagen, als was eine direkte Folgerung des ersten Hauptsatzes ist: daß sie nicht von *niedrigerem* Typus sein kann als $N(r; 0)$. Daß sie aber nicht immer von *demselben* Typus wie N ist, geht aus Beispielen hervor: es gibt kanonische Produkte, bei denen $N(r; 0)$ vom Minimaltypus, $T(r)$ dagegen von höherem (Normal- oder sogar Maximal-)Typus ist. Auch hierin unterscheiden sich also die ganzzahligen Ordnungen von den nicht ganzzahligen.

Die oben erörterten Sätze über das asymptotische Verhalten eines kanonischen Produktes behalten auch dann ihre Gültigkeit, wenn die oben angewandten Hilfsgrößen $T(r)$ und $N(r)$ durch $\log M(r)$ bezw. $n(r)$ ersetzt werden, da diese letzten Ausdrücke von denselben Ordnungstypen sind wie jene. In dieser Fassung sind diese Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen wohlbekannt.

Zur Erläuterung der in dieser Nummer besprochenen Verhältnisse betrachte man die ganze Funktion

$$f(x;\ \lambda, \alpha) = \prod_{2}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_n}, q\right) \tag{11}$$

vom Geschlechte q, wo

$$a_n = -\left[n(\log n)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\lambda}};$$

hier sei λ eine positive Zahl des Intervalles $q \leqq \lambda \leqq q+1$, und α eine beliebige reelle Zahl, die jedoch im Falle eines ganzzahligen λ den Bedingungen $\alpha > 1$ für $\lambda = q+1$, $\alpha \leqq 1$ für $\lambda = q$ genügen muß (da das Geschlecht gleich q sein soll).

Es ist offenbar

$$n(r;0) = \frac{r^\lambda}{\lambda^\alpha (\log r)^\alpha}(1+\varepsilon(r)),\quad N(r;0) = \frac{r^\lambda}{\lambda^{\alpha+1}(\log r)^\alpha}(1+\varepsilon(r)).$$

Nach LINDELÖF [8] bestehen ferner die asymptotischen Formeln:

$q < \lambda < q+1$:

$$(11') \qquad \log f(x;\lambda,\alpha) = (-1)^q \frac{\pi}{\lambda^\alpha \sin\pi(\lambda-q)}\, x^\lambda (\log x)^{-\alpha}(1+\varepsilon(x)),$$

$q = \lambda,\ \alpha < 1$ oder $q+1 = \lambda,\ \alpha > 1$:

$$(11'') \qquad \log f(x;\lambda,\alpha) = (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda^\alpha(1-\alpha)}\, x^\lambda (\log x)^{-\alpha+1}(1+\varepsilon(x)),$$

wo $\varepsilon(x)$ gleichmäßig gegen Null strebt, wenn x innerhalb des Winkels $-\pi+\delta \leqq \arg x \leqq \pi-\delta$ $(\delta > 0)$ gegen den Unendlichkeitspunkt rückt.

Man sieht, daß bei dieser Funktion die Größen $T(r)$ $(\log M(r))$ und $N(r;0)$ $(n(r;0))$ in Übereinstimmung mit den obigen Sätzen immer denselben Ordnungstypen angehören, wenn λ im Intervalle $q < \lambda < q+1$ liegt. Anders verhält sich die Funktion für die ganzzahligen Werte λ. So ist für $\lambda = q+1$ $N(r;0)$ vom *Konvergenztypus*, $T(r)$ dagegen vom *Divergenztypus*, wenn $1 < \alpha \leqq 2$. Im Falle $\lambda = q$ ist wiederum $N(r;0)$ vom *Minimaltypus*, $T(r)$ dagegen vom *Maximaltypus*, wenn $0 < \alpha < 1$ gewählt wird.

3. *Bestimmung des Geschlechtes einer meromorphen Funktion von endlicher Ordnung.* — Wir haben in Nummer 1 gesehen, daß das Geschlecht einer meromorphen Funktion höchstens gleich der Ordnung ist. Unter Anwendung der oben erörterten Eigenschaften der kanonischen Produkte wollen wir jetzt umgekehrt die Ordnung einer Funktion abschätzen, deren Geschlecht gegeben ist.

Wenn $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlichem Geschlechte q ist, so kann sie in der Form

$$(12) \qquad f(x) = x^\alpha e^{P_k(x)} \frac{\pi_1}{\pi_2}$$

dargestellt werden, wo α eine ganze Zahl, P_k ein Polynom vom Grade $k \leqq q$, und π_1, π_2 mittels der Nullstellen bzw. Pole gebildete kanonische Produkte sind, deren Geschlechter höchstens gleich q sind. Wir beweisen nun den

Satz. — *Die meromorphe Funktion* (12) *genügt der Ungleichung*

$$(13) \qquad T(r,f) < T(r,\pi_1) + T(r,\pi_2) + O(r^k + \log r).$$

Zum Beweise machen wir von nachstehendem Hilfssatz Gebrauch:

Wenn φ_1 *und* φ_2 *meromorphe Funktionen sind, so gilt*

$$T(r, \varphi_1 \varphi_2) \leqq T(r, \varphi_1) + T(r, \varphi_2). \tag{14}$$

Es ist nämlich wegen der evidenten Ungleichung $\overset{+}{\log}|\varphi_1 \varphi_2| \leqq \overset{+}{\log}|\varphi_1| + \overset{+}{\log}|\varphi_2|$ einerseits

$$m(r, \varphi_1 \varphi_2) \leqq m(r, \varphi_1) + m(r, \varphi_2)$$

und, da die Pole des Produkts $\varphi_1 \varphi_2$ in den Polen von entweder φ_1 oder φ_2 enthalten sind, andererseits

$$N(r, \varphi_1 \varphi_2) \leqq N(r, \varphi_1) + N(r, \varphi_2);$$

die Beziehung (14) folgt durch Addition dieser zwei Ungleichungen.

Die Behauptung (13) ergibt sich nunmehr, wenn man die Ungleichung (14) auf die rechte Seite der Formel anwendet und bemerkt, daß

$$T(r, x^{\alpha}) = O(\log r), \quad T\left(r, e^{P_k}\right) = O(r^k)$$

und (wegen des ersten Hauptsatzes)

$$T\left(r, \frac{1}{\pi_2}\right) = T(r, \pi_2) + O(1).$$

Wir haben in der letzten Nummer gesehen, daß die *Ordnung* eines kanonischen Produktes vom Geschlechte q höchstens gleich $q+1$ ist. Aus der soeben bewiesenen Ungleichung (13) schließen wir hiernach, daß auch die Ordnung der betrachteten meromorphen Funktion (12) nicht höher sein kann als $q+1$. Da die Ordnung andererseits nicht niedriger ist als das Geschecht q, so gelangen wir zu folgender Regel zur Bestimmung des Geschlechtes einer meromorphen Funktion von endlicher Ordnung λ:

1°. — *Wenn die Ordnung* λ *nicht ganzzahlig ist, so ist das Geschlecht gleich der größten ganzen Zahl, die kleiner als* λ *ist.*

2°. — *Wenn die Ordnung* λ *eine ganze Zahl ist, so ist das Geschlecht entweder* λ *oder* $\lambda - 1$.

Ob das Geschlecht einer meromorphen Funktion von ganzzahliger Ordnung λ gleich λ oder $\lambda - 1$ ist, hängt wesentlich davon ab, zu welchem *Typus* die Funktion gehört. In der Tat: es wurde oben (S. 38) bemerkt, daß ein kanonisches Produkt vom Geschlechte q höchstens vom *Minimaltypus* der Ordnung $q+1$ ist; diese Eigenschaft kommt nun gemäß der Ungleichung (13) *jeder* meromorphen Funktion vom Geschlechte q zu. Wir schließen also, daß wenn eine Funktion dem *Normal-* oder *Maximaltypus* einer ganzzahligen Ordnung angehört, das Geschlecht notwendigerweise gleich der Ordnung ist.

Sei nun $f(x)$ eine meromorphe Funktion vom *Minimaltypus* der betrachteten ganzzahligen Ordnung λ; sie gehört dann entweder dem Konvergenztypus oder Divergenztypus an. Im ersten Fall ist — wie aus Satz 2 S. 34 hervorgeht — die Funktion vom Geschlechte $\lambda - 1$. Im letzten Fall bleiben dagegen beide oben angegebene Möglichkeiten offen: das Geschlecht ist entweder $\lambda - 1$ oder λ, je nachdem die Größen $N(r; 0)$ und $N(r; \infty)$ *beide* dem Konvergenztypus der Ordnung λ angehören, oder wenigstens *eine* dieser Größen vom Divergenztypus ist.

Zusammenfassend haben wir also das Ergebnis:

Wenn eine meromorphe Funktion von ganzzahliger Ordnung λ ist und der Bedingung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r)}{r^\lambda} > 0$$

genügt, so ist ihr Geschlecht gleich λ. Ist wiederum

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^\lambda} = 0,$$

so ist die Funktion vom Geschlechte $\lambda - 1$, falls das Integral

$$\int^\infty \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

konvergiert; wenn dieses Integral dagegen divergent ist, so ist das Geschlecht entweder $\lambda - 1$ oder λ, je nachdem beide Reihen

$$\sum \left(\frac{1}{r_\nu(0)}\right)^\lambda \text{ und } \sum \left(\frac{1}{r_\nu(\infty)}\right)^\lambda$$

konvergieren, oder wenigstens eine dieser Reihen divergent ist.

In der Funktion $f(x; \lambda, \alpha)$ (S. 38) haben wir für $\lambda = q + 1$, $\alpha \leqq 2$ ein Beispiel dafür, daß das Geschlecht tatsächlich *kleiner* sein kann als die Ordnung. Einige allgemeine Sätze, die im dritten Abschnitt dieser Arbeit hergeleitet werden, werden aber zeigen, daß ein solcher Fall als ein ganz besonderer Ausnahmefall zu betrachten ist, der nur dann eintreffen kann, wenn die Nullstellen und Pole der fraglichen meromorphen Funktion mit einer im Vergleich mit allen übrigen z-Stellen anormal kleinen Dichtigkeit auftreten.

Wir sind nunmehr auch im Stande, den in Nummer 3 des ersten Abschnitts in Aussicht gestellten Beweis dafür zu erbringen, daß unsere Definition der *Ordnung* einer meromorphen Funktion mit der von Borel [6] gegebenen äquivalent ist. Borel geht in folgender Weise vor:

Wenn $f(x)$ eine meromorphe Funktion ist, so bilde man mittels ihrer Pole ein kanonisches Produkt $G(x)$ von möglichst niedrigem Geschlecht; das Produkt

$$H(x) = G(x) f(x) \tag{15}$$

ist dann eine ganze Funktion. Die Ordnung der meromorphen Funktion $f(x)$ ist nach Definition gleich der *höheren* der Ordnungen der ganzen Funktionen G und H.

Wir haben früher gesehen (vgl. S. 23), daß unsere Definition der Ordnung im Falle einer *ganzen* Funktion mit der üblichen übereinstimmt. Die Ordnung der meromorphen Funktion $f(x)$ ist also nach Borel gleich der größeren der Zahlen

$$\overline{\lim} \frac{\log T(r, G)}{\log r} \quad \text{und} \quad \overline{\lim} \frac{\log T(r, H)}{\log r}, \tag{16}$$

nach uns wiederum gleich

$$\overline{\lim} \frac{\log T(r, f)}{\log r}. \tag{17}$$

Um die Übereinstimmung dieser zwei Zahlen zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß G ein kanonisches Produkt ist, und daß also, nach den Sätzen der vorigen Nummer, die Größen $T(r, G)$ und $N\left(r, \frac{1}{G}\right) \equiv N(r, f)$ von derselben Ordnung sind. Nach dem ersten Hauptsatze ist aber

$$N(r, f) < T(r, f) + O(1),$$

und wir schließen folglich, daß $T(r, G)$ nicht von höherer Ordnung als $T(r, f)$ sein kann. Aus der Gleichung (15) folgt ferner unter Anwendung der Ungleichung (14), daß

$$T(r, H) \leqq T(r, G) + T(r, f),$$

wonach auch $T(r, H)$ höchstens von derselben Ordnung wie $T(r, f)$ ist.

Andererseits ist aber

$$f(x) = \frac{H(x)}{G(x)},$$

und also:

$$T(r,f) \leqq T(r,H) + T\left(r, \frac{1}{G}\right) = T(r,H) + T(r,G) + O(1),$$

woraus man sieht, daß nicht *beide* Funktionen $T(r,H)$, $T(r,G)$ von niedrigerer Ordnung als $T(r,f)$ sein können. Wir schließen hiernach, daß die obere Grenze (17) *gleich* der größeren der zwei Zahlen (16) ist, w. z. b. w.

4. *Sätze über das asymptotische Verhalten der Größe $N(r;z)$ bei einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung.* — Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung λ; nach dem Hauptsatze ist dann die „z-Summe" $m(r;z) + N(r;z)$ für *jedes* z von der Ordnung r^λ. Man schließt hieraus, daß die Ordnung der einzelnen „Teilkomponenten" m und N, für ein beliebig gegebenes z, höchstens gleich λ, und tatsächlich genau gleich λ für wenigstens *eine* dieser zwei Größen ist. Wenn die Ordnung λ nicht ganzzahlig ist, so läßt sich dieses Ergebnis wesentlich ergänzen: es gilt nämlich zunächst folgender Satz:

Satz 1. — *Wenn die Ordnung λ einer meromorphen Funktion nicht eine ganze Zahl ist, so ist die Funktion $N(r;z)$ von der Ordnung r^λ für jedes z außer möglicherweise einem einzigen Wert.*

Nach dem ersten Hauptsatze ist, wie soeben bemerkt wurde, $N(r;z)$ *höchstens* von der Ordnung r^λ. Es genügt also, wenn wir zeigen, daß ihre Ordnung nicht für zwei verschiedene Werte $z = a$ und $z = b$ niedriger sein kann.

Zu diesem Zweck stellen wir die betrachtete meromorphe Funktion $f(x)$ in der kanonischen Form (12) dar. Da λ nicht ganzzahlig ist, so ist das Geschlecht $q < \lambda$ und a fortiori $k < \lambda$. Die kanonischen Produkte π_1 und π_2 sind wiederum von derselben Ordnung wie die Größen $N(r;0)$ bzw. $N(r;\infty)$; wären nun diese Ausdrücke *beide* von niedrigerer Ordnung als λ, so könnte die Ordnung der meromorphen Funktion $f(x)$ gemäß der Ungleichung (13) auch nicht gleich λ sein.

Die Funktion $N(r;z)$ ist also für mindestens einen der Werte $z = 0$ und $z = \infty$ von der Ordnung r^λ. Dies gilt aber nicht nur für dieses spezielle Wertpaar, sondern für ein ganz beliebiges $z = a$, $z = b$ $(a \neq b)$, denn dieser allgemeine Fall läßt sich auf jenen zurückführen durch eine geeignete lineare Transformation (mit nichtverschwindender Determinante) von $f(x)$; wegen der „Invarianz" der Fundamentalgröße T gegenüber einer solchen Transformation bleibt hierbei die Ordnung λ der meromorphen Funktion unverändert. Hiermit ist der Beweis vollständig erledigt.

Unter Ausnutzung der in Nummer 2 angegebenen präziseren Sätze über das Verhalten kanonischer Produkte führt die eben durchgeführte Überlegung zu dem genaueren Ergebnis, daß *die Funktionen* $T(r)$ *und* $N(r; z)$ im Falle einer nicht ganzzahligen Ordnung auch *demselben Typus angehören außer* wieder *für einen eventuellen Ausnahmewert.* So schließt man z. B. mittels des Satzes von Valiron (S. 37), daß $N(r; z)$ vom Konvergenztypus ist für *jedes* z, sobald dies für *zwei* verschiedene Werte z zutrifft; ein Ergebnis, das auch in folgender Weise ausgedrückt werden kann:

Wenn, unter der Voraussetzung des Satzes 1, *die Reihe*

$$\Sigma\left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^\lambda$$

für einen Wert z *divergent ist, so divergiert sie für alle Werte* z *mit eventueller Ausnahme eines einzigen Wertes.*

Wir sehen also, daß die Kenntnis der z-Stellen einer meromorphen Funktion von nicht ganzzahliger Ordnung für *zwei* Werte z mit erheblicher Genauigkeit das asymptotische Verhalten *sämtlicher* Funktionen $N(r; z)$ sowie der Fundamentalgröße $T(r)$ bestimmt. Über die asymptotischen Eigenschaften der „Teilkomponenten" $m(r; z)$ geben die obigen Sätze dagegen keinen Aufschluß; sie scheinen im allgemeinen sich ganz anders zu verhalten als die Ausdrücke N: so sind z. B. bei sämtlichen Seite 20, 21 betrachteten Beispielen die Größen m für *alle* z mit Ausnahme einzelner Werte *beschränkt.* Von den zwei Gliedern der z-Summe einer meromorphen Funktion scheint also die „Dichtekomponente" $N(r; z)$ im allgemeinen stärker zu sein als die „Konvergenzkomponente" $m(r; z)$; daß dies nicht nur bei Funktionen von nicht ganzzahliger Ordnung tatsächlich der Fall ist, sondern eine ganz *allgemeine* Eigenschaft meromorpher Funktionen ist, wird aus dem dritten Abschnitt dieser Arbeit hervorgehen.

Die obigen Sätze sind nicht mehr gültig, wenn die Ordnung der betrachteten meromorphen Funktion eine *ganze*, positive Zahl ist. Eine solche Funktion kann ja sogar zwei Picardsche Ausnahmewerte besitzen, die sie überhaupt nicht annimmt, und für welche die Größe $N(r; z)$ also identisch verschwindet. Aus der kanonischen Darstellung (12) geht allerdings hervor, daß dieser extremste Fall nur dann zutrifft, wenn die betreffende meromorphe Funktion von der Form $e^{P_\lambda(x)}$ oder gleich einer linear gebrochenen Funktion eines solchen Exponentialausdruckes ist. Eine solche Funktion ist vom Normaltypus der betrachteten Ordnung λ; es kann aber auch bei Funktionen vom Maximal- oder Minimaltypus (Divergenztypus) eintreffen, daß die Größe $N(r; z)$ für *zwei* verschiedene Werte z von niedrigerem *Typus* ist als die Fundamentalgröße $T(r)$. Dies trifft z. B. für die in Nummer 2 betrachtete Funktion $f(x; \lambda, \alpha)$ für die zwei Werte $z = 0$ und $z = \infty$ zu, im Falle $\lambda = q + 1$, wenn $1 < \alpha \leqq 2$, im Falle $\lambda = q$, wenn $0 < \alpha < 1$ (vgl. S. 39). Daß die Anzahl solcher Ausnahmewerte z andererseits auch nicht größer als zwei sein kann, werden wir im folgenden Abschnitt sehen.

Wir wollen schließlich, als letzte Anwendung der kanonischen Darstellung einer meromorphen Funktion von endlicher Ordnung etwas eingehender eine Frage behandeln, die sich ungezwungen im Zusammenhang mit unserem Hauptsatz stellt und auch das verschiedenartige Verhalten einer Funktion von nicht ganzzahliger und einer solchen von ganzzahliger Ordnung beleuchtet. Es ist dies die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Quotienten

$$\frac{N(r; z)}{T(r)} \text{ und } \frac{m(r; z)}{T(r)}$$

für verschiedene Werte z. Nach dem ersten Hauptsatze ist (wenn wir von dem trivialen Fall absehen, wo die betreffende meromorphe Funktion eine Konstante ist)

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{m(r; z)}{T(r)} + \frac{N(r; z)}{T(r)} \right) = 1$$

füs *jedes* z. Insbesondere ist hiernach

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r; z)}{T(r)} \leqq 1, \quad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r; z)}{T(r)} \leqq 1.$$

Wir werden nun zeigen, daß andererseits

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r; z)}{T(r)} > 0 \left(\text{und also } \underline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r; z)}{T(r)} < 1 \right) \tag{18}$$

sein muß für jedes z außer möglicherweise *einem einzigen Wert*, falls die Ordnung der betreffenden meromorphen Funktion nicht ganzzahlig ist. Dieses Ergebnis ist keine Folge aus den oben bewiesenen Sätzen über das asymptotische Verhalten der Größe $N(r; z)$; diese kann nämlich sehr wohl demselben Typus wie $T(r)$ angehören, ohne daß die Ungleichung (18) zu bestehen braucht. Die zu beweisende Ungleichung ist als unmittelbares Korollar im nachstehenden, etwas schärferen Satze enthalten:

Satz 2. — *Wenn $f(x)$ eine meromorphe Funktion von der nicht ganzzahligen Ordnung λ ist, so existiert eine positive, nur von λ abhängige Zahl $\varkappa(\lambda)$ derart, daß die Beziehung*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;a)+N(r;b)}{T(r)} \geqq \varkappa(\lambda) \tag{19}$$

für jedes Wertpaar a, b $(a \neq b)$ besteht.

Wir führen den Beweis zunächst für das spezielle Wertpaar $a=0$, $b=\infty$. Hierzu stellen wir die gegebene meromorphe Funktion $f(x)$, deren Geschlecht q der Bedingung $q<\lambda<q+1$ unterworfen ist, in der kanonischen Form (12) dar, und schätzen die Fundamentalgröße $T(r)$ mittels der Ungleichungen (8) und (13) ab. Man findet so

$$T(r) < c\,r^q \varphi(r) + O(r^q + \log r), \tag{20}$$

wo wir zur Abkürzung

$$\varphi(r) = \int_0^r \frac{Q(t)}{t^{q+1}}\,dt + r\int_r^\infty \frac{Q(t)}{t^{q+2}}\,dt \tag{21}$$

mit

$$Q(r) = N(r;0) + N(r;\infty)$$

gesetzt haben. Weil das Geschlecht von $f(x)$ gleich q ist, so ist das Integral

$$\int^\infty \frac{Q(t)}{t^{q+1}}\,dt$$

divergent; es ist also $\varphi(r)\to\infty$ für $r\to\infty$ $\left(\text{im Falle } q=0 \text{ sogar } \frac{\varphi(r)}{\log r}\to\infty\right)$. Bezeichnet $\varepsilon(r)$ eine Größe, die mit $\frac{1}{r}$ gegen Null strebt, so ist also gemäß (20)

$$T(r) < c\,r^q \varphi(r)\,(1+\varepsilon(r)). \tag{22}$$

Wir behaupten nun, daß $\varphi(r)$ der Bedingung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{Q(r)}{r^q \varphi(r)} \geqq \tfrac{1}{4} - |\lambda - q - \tfrac{1}{2}|^2 \tag{23}$$

genügt. Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß die Summe $Q(r)$ nach dem Satze 1 dieser Nummer von der Ordnung r^λ ist. Aus der Definition (21) folgt hiernach leicht, daß die Funktion $\varphi(r)$ höchstens von der Ordnung $r^{\lambda-q}$ ist. Sie kann aber auch nicht von niedrigerer Ordnung sein, da $T(r)$ sonst gemäß (22) nicht von der Ordnung r^{λ} sein könnte. *Die Funktion $\varphi(r)$ ist also von der Ordnung $r^{\lambda-q}$*; wir werden nun zeigen, daß ein Widerspruch mit dieser Tatsache entsteht, sobald man annimmt, daß die Ungleichung (23) falsch wäre.

Wenn die Beziehung (23) nicht richtig ist, so existiert eine positive Zahl

$$k < \tfrac{1}{4} - |\lambda - q - \tfrac{1}{2}|^2 \tag{24}$$

derart, daß die Ungleichung

$$Q(r) < k r^q \varphi(r) \tag{25}$$

von einem gewissen Wert $r = r_0$ ab besteht. Nach (21) ist aber $Q(r) = -r^{q+2}\varphi''(r)$, und die letzte Ungleichung kann also auch in nachstehender Form geschrieben werden:

$$k\varphi(r) + r^2\varphi''(r) > 0 \text{ für } r \geqq r_0. \tag{26}$$

Wir setzen hier

$$\varphi(r) = r^{\mu}\psi(r), \tag{27}$$

wo μ die Wurzel

$$\mu = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} - k} \tag{28}$$

der Gleichung $k + \mu(\mu - 1) = 0$ ist; es ist offenbar gemäß (24):

$$1 - \mu < \lambda - q < \mu. \tag{29}$$

Durch diese Substitution geht die Ungleichung (26) über in

$$2\mu\psi'(r) + r\psi''(r) = \frac{d}{dr}[(2\mu - 1)\psi(r) + r\psi'(r)] > 0 \text{ für } r \geqq r_0.$$

Da die in den Klammern stehende Funktion hiernach mit r *wachsend* ist, so muß einer der zwei folgenden Fälle eintreffen:

1° *Es ist*

$$(2\mu - 1)\psi(r) + r\psi'(r) \leqq 0 \text{ für } r \geqq r_0.$$

2° *Es existiert eine positive Zahl η und eine so große Zahl $r_1 \geqq r_0$, daß*

$$(2\mu - 1)\psi(r) + r\psi'(r) \geqq \eta \text{ für } r \geqq r_1.$$

Im ersten Falle findet man durch Integration (man bemerke hierbei, daß $\psi > 0$ ist):

$$\psi(r) \leqq \psi(r_0)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-2\mu}.$$

Hiernach könnte die Ordnung der Funktion $\varphi(r)$ höchstens gleich $1-\mu$ sein, was wegen der Ungleichung (29) unmöglich ist.

Im zweiten Falle ergibt die Integration (es empfiehlt sich hierbei zunächst die Variabelsubstitution $\psi = r^{1-2\mu}\omega$ vorzunehmen)

$$\psi(r) \geqq \frac{\eta}{2\mu-1} + \left(\psi(r_1) - \frac{\eta}{2\mu-1}\right)\left(\frac{r_1}{r}\right)^{2\mu-1} \quad \text{für } r \geqq r_1.$$

Nach (28) ist $2\mu - 1 > 0$; bezeichnet ε eine positive Zahl, die kleiner als $\frac{\eta}{2\mu-1}$ ist, so ist also $\psi(r) \geqq \varepsilon$ von einem gewissen Wert $r = r_2 \geqq r_1$ ab. Nach (27) könnte also die Ordnung von $\varphi(r)$ nicht niedriger als μ sein, was wegen der Beziehung $\mu > \lambda - q$ unmöglich ist.

Die Antithese (25) führt also jedenfalls zu einem Widerspruch und wir schließen demnach, daß die Ungleichung (23) bestehen muß; durch die Ungleichung (22) folgt hieraus ferner, daß auch

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;0) + N(r;\infty)}{T(r)} \geqq \frac{1}{c}\left(\tfrac{1}{4} - |\lambda - q - \tfrac{1}{2}|^2\right)^1.$$

Hier können wir schließlich die Werte $z = 0$, $z = \infty$ durch ganz beliebige $z = a$, $z = b$ $(a \neq b)$ ersetzen, denn dieser allgemeine Fall wird wieder auf jenen durch eine geeignete lineare Transformation von $f(x)$ zurückgeführt. Unser Satz ist hiermit vollständig bewiesen; zugleich ist für die Zahl $\varkappa(\lambda)$ die untere Schranke

$$\varkappa(\lambda) \geqq \frac{1}{c}\left(\tfrac{1}{4} - |\lambda - q - \tfrac{1}{2}|^2\right) \tag{30}$$

hervorgegangen, wo c den Wert

$$c = b(q+1)^2$$

hat (vgl. (10) S. 36); b bezeichnet hierbei eine von q unabhängige Konstante.

---

[1] Man hätte auch den von VALIRON in seiner These (Paris, 1914) eingeführten Begriff der „präzisen" Ordnung einer Funktion von endlicher Ordnung verwenden können, um ein ähnliches Ergebnis zu beweisen. Der von uns eingeschlagene Weg scheint indessen einfacher zum Ziel zu führen.

Es bezeichne im folgenden $\varkappa(\lambda)$ den bestmöglichen, d. h. den größten Wert, der der rechten Seite der Ungleichung (19) gegeben werden kann. Für die *ganzzahligen* Werte $\lambda = q$ und $\lambda = q+1$ nimmt die gefundene untere Schranke für $\varkappa(\lambda)$ den Wert Null an. Tatsächlich muß auch $\varkappa(\lambda)$ für ganzzahlige λ verschwinden, denn eine meromorphe Funktion von ganzzahliger Ordnung kann ja sehr wohl *zwei* verschiedene Ausnahmewerte z haben, für welche

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;z)}{T(r)} = 0.$$

Die in Nummer 3 S. 38 betrachtete Funktion $f(x; \lambda, \alpha)$ liefert eine *obere* Schranke für den Ausdruck $\varkappa(\lambda)$. Für diese Funktion ist, wenn wir der Einfachheit halber $\alpha = 0$ wählen,

$$N(r;0) \sim \frac{r^\lambda}{\lambda}, \quad N(r;\infty) \equiv 0,$$

und nach (11')

$$T(r) = m(r,f) \sim \frac{r^\lambda}{2 \sin \pi(\lambda - q)} \int_{-\pi}^{+\pi} \overset{\pm}{\cos}\, \lambda\varphi\, d\varphi,$$

wobei das Integral über diejenigen Intervalle zu erstrecken ist, wo $\cos \lambda\varphi > 0$ oder < 0 ist, je nachdem q gerade oder ungerade ist. Es wird

$$T(r) \sim \begin{cases} \dfrac{q + \sin \pi(\lambda - q)}{\lambda \sin \pi(\lambda - q)} & \text{für } q < \lambda \leqq q + \frac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{q+1}{\lambda \sin \pi(\lambda - q)} & \text{für } q + \frac{1}{2} < \lambda < q + 1, \end{cases}$$

und man findet also:

$$(31) \qquad \varkappa(\lambda) \leqq \lim_{r=\infty} \frac{N(r;0) + N(r;\infty)}{T(r)} = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi(\lambda - q)}{q + \sin \pi(\lambda - q)} & \text{für } q < \lambda \leqq q + \frac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{\sin \pi(\lambda - q)}{q+1} & \text{für } q + \frac{1}{2} < \lambda < q + 1. \end{cases}$$

Die in (30) und (31) gegebenen Schranken, zwischen denen $\varkappa(\lambda)$ liegt, verschwinden beide für ganzzahlige Werte λ und erreichen zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $\lambda = q$ und $\lambda = q+1$ ein Maximum

$$\frac{1}{4b(q+1)^2} \text{ bzw. } \frac{1}{q+1}.$$

Für $\lambda \to \infty$ strebt also $\varkappa(\lambda)$ gegen Null.

In unserer Arbeit [11] haben wir die Frage gestellt, ob bei einer ganzen Funktion von nicht ganzzahliger Ordnung die Gleichung

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;z)}{T(r)} = 0$$

für ein endliches z möglich sei. Aus obigem geht nun hervor, daß diese Frage verneinend zu beantworten ist. Denn für eine ganze Funktion ist $N(r;\infty) \equiv 0$, und also

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} \geqq \varkappa(\lambda)$$

für *jedes* endliche z.

III. Der zweite Hauptsatz.

Das zentrale Ergebnis des ersten Abschnitts ist der erste Hauptsatz, der die Invarianz der Summe $m(r;z)+N(r;z)$ für verschiedene Werte z ausspricht. Außer diesem ganz allgemeingültigen Resultat haben wir einige weitere Eigenschaften der Größen m und N in dem speziellen Fall gefunden, wo die Ordnung der betrachteten meromorphen Funktion einen endlichen, nicht ganzzahligen Wert hat. In dem vorliegenden Abschnitt wird die Untersuchung der einzelnen „Teilkomponenten" m und N weiter geführt. Der *zweite Hauptsatz*, der in den nachfolgenden Nummern hergeleitet werden soll, wird als unmittelbare Folgerung eine Reihe diesbezüglicher Sätze ergeben. Von den Ergebnissen der zwei ersten Abschnitte wird in der folgenden Untersuchung nur das in den zwei ersten Nummern des ersten Abschnitts Bewiesene, vor Allem der erste Hauptsatz benutzt.

1. *Ein Hilfssatz über die logarithmische Ablettung einer meromorphen Funktion.* — Zum Beweise des zweiten Hauptsatzes haben wir nachstehenden Hilfssatz über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion nötig:

Satz. — *Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion und λ eine positive Zahl. Dann besteht für $r > r_0 > 0$ die Ungleichung*

$$(1) \qquad \int_{r_0}^{r} \frac{m\left(t, \frac{f'}{f}\right)}{t^{\lambda+1}}\, dt < \varepsilon(r) \int_{r_0}^{r} \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt + O(1),$$

wo $\varepsilon(r)$ mit $\frac{1}{r}$ verschwindet und $O(1)$ eine Größe bezeichnet, die für $r > r_0$ beschränkt ist.

Ferner gilt die Ungleichung

$$(2) \qquad m\left(r; \frac{f'}{f}\right) < O(\log T(r)) + O(\log r)$$

für jedes r mit eventueller Ausnahme einer Wertmenge, die mit einer Intervallfolge von endlicher Gesamtlänge überdeckt werden kann.

Falls $f(x)$ insbesondere von endlicher Ordnung ist, so besteht die letzte Ungleichung ausnahmslos für jedes r von einem gewissen Wert ab, und es ist also

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r). \tag{2'}$$

Um den Beweis, der mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist, etwas übersichtlicher zu machen, gehen wir schrittweise vor und beweisen zunächst den

Hilfssatz. — *Wenn $f(x)$ eine meromorphe Funktion ist, so besteht die Ungleichung*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 2 \overset{+}{\log} \varrho + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho - r} + 4 \overset{+}{\log}\, T(\varrho, f) + O(1) \tag{3}$$

für $0 < r < \varrho \leqq 2r$; hierbei bezeichnet $O(1)$ eine Größe, die für unbeschränkt wachsendes r unter einer endlichen Schranke liegt.

Beweis. — Wird die betrachtete meromorphe Funktion in dem Kreise $|x| < \varrho$ durch die Poisson-Jensensche Formel (A) dargestellt, so ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(\varrho e^{i\vartheta}\right) \right| \frac{2 \varrho e^{i\vartheta} d\vartheta}{\left(\varrho e^{i\vartheta} - x\right)^2}$$

$$+ \sum_{|a_\mu| < \varrho} \frac{\varrho^2 - |a_\mu|^2}{(x - a_\mu)(\varrho^2 - \bar{a}_\mu x)} - \sum_{|b_\nu| < \varrho} \frac{\varrho^2 - |b_\nu|^2}{(x - b_\nu)(\varrho^2 - \bar{b}_\nu x)},$$

nd also für $|x| = r < \varrho$

$$\left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \leqq \frac{2\varrho}{(\varrho - r)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| f\left(\varrho e^{i\vartheta}\right) \right| \right| d\vartheta$$

$$+ \sum_{|a_\mu| < \varrho} \frac{\varrho^2 - |a_\mu|^2}{|x - a_\mu| |\varrho^2 - \bar{a}_\mu x|} + \sum_{|b_\nu| < \varrho} \frac{\varrho^2 - |b_\nu|^2}{|x - b_\nu| |\varrho^2 - \bar{b}_\nu x|}.$$

Es ist hier $|\varrho^2 - \bar{a}_\mu x| \geqq \varrho^2 - |a_\mu| r > \varrho(\varrho - r)$, und daher

$$\frac{\varrho^2 - |a_\mu|^2}{|x - a_\mu| |\varrho^2 - \bar{a}_\mu x|} = \frac{\varrho(\varrho^2 - |a_\mu|^2)}{|\varrho^2 - \bar{a}_\mu x|^2} \left| \frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}{\varrho(x - a_\mu)} \right| < \frac{\varrho}{(\varrho - r)^2} \left| \frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}{\varrho(x - a_\mu)} \right|.$$

Es wird also

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| < \frac{2\varrho}{(\varrho-r)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(\varrho e^{i\vartheta}\right)\right|\right|d\vartheta\right.$$

$$\left. + \sum_{|a_\mu|<\varrho}\left|\frac{\varrho^2-\bar{a}_\mu x}{\varrho(x-a_\mu)}\right| + \sum_{|b_\nu|<\varrho}\left|\frac{\varrho^2-\bar{b}_\nu x}{\varrho(x-b_\nu)}\right|\right),$$

oder, unter Anwendung der evidenten Ungleichungen

$$\text{(4)}\qquad \left\{\begin{array}{l} \overset{+}{\log}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_1 + \overset{+}{\log}\alpha_2 + \cdots + \overset{+}{\log}\alpha_p, \\ \overset{+}{\log}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_1 + \overset{+}{\log}\alpha_2 + \cdots + \overset{+}{\log}\alpha_p + \overset{+}{\log}p, \end{array}\right. \qquad (\alpha_\nu \geqq 0)$$

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| < \log 2 + \overset{+}{\log}\varrho + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho-r} + \overset{+}{\log}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(\varrho e^{i\vartheta}\right)\right|\right|d\vartheta\right)$$

$$+ \sum_{|a_\mu|<\varrho}\overset{+}{\log}\left|\frac{\varrho^2-\bar{a}_\mu x}{\varrho(x-a_\mu)}\right| + \sum_{|b_\nu|<\varrho}\overset{+}{\log}\left|\frac{\varrho^2-\bar{b}_\nu x}{\varrho(x-b_\nu)}\right| + \overset{+}{\log}\left(n(\varrho,f)+n\left(\varrho,\frac{1}{f}\right)+1\right).$$

Hier sind die von den Nullstellen und Polen herrührenden Summen gleich den S. 13 definierten harmonischen Funktionen $V_\varrho\left(x,\frac{1}{f}\right)$ bzw. $V_\varrho(x,f)$. Mit dieser Bezeichnung ergibt sich aus der letzten Ungleichung durch Multiplikation mit $d\varphi$ und Integration:

$$\text{(5)}\qquad m\left(r,\frac{f'}{f}\right) < \log 2 + \overset{+}{\log}\varrho + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho-r} + \overset{+}{\log}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(\varrho e^{i\vartheta}\right)\right|\right|d\vartheta\right)$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_\varrho\left(re^{i\varphi},f\right)d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}V_\varrho\left(re^{i\varphi},\frac{1}{f}\right)d\varphi$$

$$+ \overset{+}{\log}\left(n(\varrho,f)+n\left(\varrho,\frac{1}{f}\right)+1\right).$$

Zur weiteren Abschätzung der Glieder auf der rechten Seite der letzten Ungleichung bemerke man zunächst, daß nach dem Hauptsatze (I)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(\varrho e^{i\vartheta}\right)\right|\right|d\vartheta = m(\varrho,f)+m\left(\varrho,\frac{1}{f}\right) < 2\,T(\varrho)+O(1),$$

und also

$$\text{(6)}\qquad \overset{+}{\log}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(\varrho e^{i\vartheta}\right)\right|\right|\right) < \overset{+}{\log}\,T(\varrho)+O(1).$$

Ferner wird, da $V_r(x,f)$ für $|x| = r$ verschwindet, nach dem Gaussschen Mittelwertsatz

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\varrho\left(re^{i\varphi}, f\right) d\varphi \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (V_\varrho - V_r)\, d\varphi = (V_\varrho - V_r)_{x=0} = N(\varrho, f) - N(r, f),$$

und in derselben Weise

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\varrho\left(re^{i\varphi}, \frac{1}{f}\right) d\varphi = N\left(\varrho, \frac{1}{f}\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right). \tag{7'}$$

Beachtet man noch, daß gemäß (4)

$$\overset{+}{\log}\left(n(\varrho, f) + n\left(\varrho, \frac{1}{f}\right) + 1\right) < \log 2 + \overset{+}{\log}\left(n(\varrho, f) + n\left(\varrho, \frac{1}{f}\right)\right),$$

so folgt aus (5), daß

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < O(1) + \overset{+}{\log}\,\varrho + 2\,\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho - r} + \overset{+}{\log}\,T(\varrho) + N(\varrho, f) + N\left(\varrho, \frac{1}{f}\right) \tag{8}$$

$$- \left(N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right)\right) + \overset{+}{\log}\left(n(\varrho, f) + n\left(\varrho, \frac{1}{f}\right)\right),$$

wo $O(1)$ eine für $0 < r_0 < r < \varrho$ beschränkte Größe bezeichnet.

Wir wählen nun eine Zahl ϱ' des Intervalles

$$r < \varrho' \leqq 2r.$$

Setzt man der Kürze halber

$$N(t) = N(t, f) + N\left(t, \frac{1}{f}\right),$$

so ergibt sich dann für $N(\varrho)$, die eine *konvexe* Funktion von $\log\varrho$ ist (vgl. die Definition (1′) bzw. (1″) S. 12), die für $r < \varrho \leqq \varrho'$ gültige obere Schranke

$$N(\varrho) \leqq N(r) + \frac{\log\frac{\varrho}{r}}{\log\frac{\varrho'}{r}}\,(N(\varrho') - N(r)). \tag{9}$$

Hier ist

$$\log\frac{\varrho}{r} = \log\left(1+\frac{\varrho-r}{r}\right) < \frac{\varrho-r}{r},$$

und wegen der für $0 \leqq t \leqq 1$ gültigen Ungleichung $\log(1+t) \geqq t\log 2$

$$\log\frac{\varrho'}{r} = \log\left(1+\frac{\varrho'-r}{r}\right) \geqq \frac{\varrho'-r}{r}\log 2.$$

Da ferner nach dem ersten Hauptsatze

$$N(\varrho') - N(r) \leqq N(\varrho') < 2\,T(\varrho') + O(1),$$

so folgt aus (9), daß

$$N(\varrho) - N(r) < \frac{\varrho-r}{\varrho'-r}\,\frac{T(\varrho')}{\log\sqrt{2}} + O(1). \tag{10}$$

Wir bestimmen nun die Größe ϱ durch die Bedingung

$$\varrho - r = \frac{\varrho'-r}{T(\varrho')+1}, \tag{11}$$

woraus $r < \varrho \leqq \varrho'$ folgt. Man erhält dann gemäß (10)

$$N(\varrho, f) + N\left(\varrho, \frac{1}{f}\right) - \left(N(r,f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right)\right) \equiv N(\varrho) - N(r) < O(1). \tag{10'}$$

Setzt man weiter

$$n(r) = n(r,f) + n\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

so ergibt sich nach dem ersten Hauptsatze:

$$2\,T(\varrho') + O(1) > N(\varrho')$$

$$= \int_0^{\varrho'} \frac{n(t)}{t}\,dt \geqq \int_{\varrho}^{\varrho'} \frac{n(t)}{t}\,dt \geqq n(\varrho)\log\frac{\varrho'}{\varrho} \geqq n(\varrho)\,\frac{\varrho'-\varrho}{\varrho}\log 2.$$

Nach (11) ist aber

$$\varrho' - \varrho = (\varrho'-r)\frac{T(\varrho')}{T(\varrho')+1} = (\varrho'-r)\frac{1}{1+\dfrac{1}{T(\varrho')}},$$

und man findet also, daß

$$n(\varrho) < \frac{\varrho'}{(\varrho'-\varrho)\log 2}(2\,T(\varrho') + O(1)) = \frac{2\varrho'}{(\varrho'-r)\log 2}(T(\varrho') + O(1)),$$

und, durch Anwendung der Ungleichungen (4),

$$\overset{+}{\log}\, n(\varrho) < \overset{+}{\log}\, \varrho' + \overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho'-r} + \overset{+}{\log}\, T(\varrho') + O(1)\,[1]. \tag{12}$$

Wir führen nun die in (10′) und (12) gegebenen Schranken in die Ungleichung (8) ein. Beachtet man noch daß gemäß (11)

$$\overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho - r} = \overset{+}{\log} \frac{T(\varrho')+1}{\varrho'-r} \leqq \overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho'-r} + \overset{+}{\log}\, T(\varrho') + \log 2,$$

und daß weiter, weil $\varrho \leqq \varrho'$ ist, $\overset{+}{\log}\, \varrho \leqq \overset{+}{\log}\, \varrho'$ und $T(\varrho) \leqq T(\varrho')$, so gelangt man so zu der Ungleichung

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 2\,\overset{+}{\log}\, \varrho' + 3\,\overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho'-r} + 4\,\overset{+}{\log}\, T(\varrho') + O(1),$$

die somit für jeden Wert ϱ' des Intervalles $r < \varrho' \leqq 2r$ besteht. Unser Hilfssatz ist hiermit bewiesen.

Mittels des soeben bewiesenen Hilfssatzes können wir nunmehr leicht den am Anfang dieser Nummer ausgesprochenen Satz nachweisen.

Sei zunächst $f(x)$ von endlicher Ordnung, d. h. $\log T(r) = O(\log r)$. Es wird dann, wenn $\varrho = 2r$ gesetzt wird,

$$\log \varrho' = \log r + \log 2, \quad \overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho - r} = O(1), \quad \log T(\varrho) = O(\log r),$$

und die Beziehung (2′) ergibt sich also aus (3).

Ist $f(x)$ wiederum von unendlicher Ordnung, so machen wir von einem bekannten Borelschen Satz Gebrauch, wonach $T(r)$ als eine wachsende Funktion ihres Argumentes, für ein gegebenes $k > 1$ der Bedingung

$$T(r') < [T(r)]^k \quad \left(r' = r + \frac{1}{\log T(r)}\right) \tag{13}$$

[1] Wir haben oben stillschweigend angenommen, daß $f(0) \neq 0$ und ∞ ist. Ist dies nicht der Fall, so hat man für die Größen $N(r, f)$ bzw. $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ die Definitionen (1″) S. 12 zu benutzen; das Ergebnis (12) behält auch in diesem Fall seine Gültigkeit bei.

genügt für jedes $r > 0$ außer möglicherweise einer Wertmenge I von *endlichem Maß* [1]. Wählen wir nun in (3)

$$\varrho = r + \frac{1}{\log T(r)}, \tag{14}$$

so wird also für jedes r, das nicht der Ausnahmemenge I angehört,

$$\overset{+}{\log} T(\varrho) < k \overset{+}{\log} T(r).$$

Ferner ist nach (14)

$$\overset{+}{\log} \varrho < \overset{+}{\log} r + O(1), \quad \overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho - r} = \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} T(r) \leqq \overset{+}{\log} T(r),$$

und es wird gemäß (3), wenn z. B. $k = 2$ gewählt wird,

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 2 \overset{+}{\log} r + 11 \overset{+}{\log} T(r) + O(1) = O(\log T(r)) + O(\log r)$$

für alle Werte r außerhalb der Menge I, w. z. b. w.

Um schließlich den Beweis der Ungleichung (1) zu erbringen, wähle man eine positive Zahl $r' > 1$ und setze in der Formel (3)

$$\varrho = r + \frac{r' - r}{r'}. \tag{14'}$$

---

[1] Da der Beweis des Borelschen Satzes sehr einfach ist, wollen wir ihn hier in aller Kürze wiedergeben: Wenn die Ungleichung (13) nicht für *alle* hinreichend großen Werte r richtig ist, so existiert ein Wert $r = r_0$, für welche $T(r_0) > 1$ und die besagte Ungleichung nicht gültig ist. Wir bezeichnen $r_0' = r_0 + \frac{1}{\log T(r_0)}$ und $r_0' - r_0 = \varDelta_0$. Sei $r = r_1$ der *erste* Wert $> r_0'$, wofür die Ungleichung (13) unrichtig ist; wir setzen $r_1' = r_1 + \frac{1}{\log T(r_1)}$ und $r_1' - r_1 = \varDelta_1$. Indem man dieses Verfahren weiter fortsetzt, erhält man eine wohlbestimmte Wertfolge $r_0, r_0', r_1, r_1', \ldots, r_\nu, r_\nu', \ldots$ und eine entsprechende Intervallfolge $\varDelta_0, \varDelta_1, \ldots, \varDelta_\nu, \ldots$, von folgenden Eigenschaften:

$$T(r_\nu) \geqq T(r_{\nu-1}') \geqq (T(r_{\nu-1}))^k, \text{ und also } T(r_\nu) \geqq (T(r_0))^{k^\nu}, \tag{a}$$

$$\varDelta_\nu = r_\nu' - r_\nu = \frac{1}{\log T(r_\nu)} \leqq \left(\frac{1}{k}\right)^\nu \frac{1}{\log T(r_0)}. \tag{b}$$

Der Satz ist offenbar richtig, wenn die Anzahl der Intervalle $\varDelta$ endlich ist. Sind sie aber in unendlicher Anzahl vorhanden, so ist nach (a) $\lim\limits_{\nu = \infty} T(r_\nu) = \infty$, woraus man sieht, daß $r_\nu \to \infty$ für $\nu \to \infty$, und daß also die Intervalle $\varDelta_\nu (\nu = 0, 1, \ldots)$ *alle* Werte $r > r_0$ enthalten, für welche die Ungleichung (13) unrichtig ist. Nun ist aber nach (b) die Summe der Längen dieser Intervalle

$$\sum \varDelta_\nu \leqq \frac{1}{\log T(r_0)} \sum \left(\frac{1}{k}\right)^\nu = \frac{k}{k-1} \frac{1}{\log T(r_0)},$$

also endlich, w. z. b. w.

Dann multipliziere man beide Seiten mit $\frac{dr}{r^{\lambda+1}}$, wo $\lambda > 0$, und integriere von $r = 1$ bis $r = r'$. Man sieht leicht ein, daß diejenigen Integrale, welche von den zwei ersten und dem letzten Glied der rechten Seite der Ungleichung (3) herrühren, unter einer endlichen von r' unabhängigen Schranke liegen[1]. Das dritte Glied ergibt wiederum das Integral

$$\int_1^{r'} \frac{\overset{+}{\log} T(\varrho)}{r^{\lambda+1}} dr = \mu(r').$$

Bemerkt man nun, daß gemäß (14') $\varrho < r + 1 \leqq 2r$ und $d\varrho = \left(1 - \frac{1}{r'}\right) dr$, so folgt, daß

$$\mu(r') = \int_1^{r'} \frac{\overset{+}{\log} T(\varrho)}{\varrho^{\lambda+1}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\lambda+1} dr \leqq \frac{2^{\lambda+1}}{1 - \frac{1}{r'}} \int_1^{r'} \frac{\overset{+}{\log} T(\varrho)}{\varrho^{\lambda+1}} d\varrho.$$

Es ist nun $\overset{+}{\log} T(r) = \varepsilon(r) T(r)$ und also, falls das letzte Integral nicht für $r' \to \infty$ konvergent ist,

$$\int_1^{r'} \frac{\overset{+}{\log} T(r)}{r^{\lambda+1}} dr = \varepsilon(r') \int_1^{r'} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

---

[1] Es ist zunächst nach (14') $\varrho < r + 1$ und also

$$\int_1^{r'} \frac{\log \varrho}{r^{\lambda+1}} dr < \int_1^{\infty} \frac{\log(1+r)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

Ferner ist

$$\int_1^{r'} \overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho - r} \cdot \frac{dr}{r^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda} \int_1^{r'} \log \frac{r'}{r'-r} d\left(\frac{1}{r'^{\lambda}} - \frac{1}{r^{\lambda}}\right) = \frac{r'^{\lambda}-1}{\lambda r'^{\lambda}} \log \frac{r'}{r'-1} + \frac{1}{\lambda} \int_1^{r'} \frac{r'^{\lambda} - r^{\lambda}}{r'-r} \cdot \frac{dr}{(r'r)^{\lambda}}.$$

Hier hat das erste Glied rechts für $1 \leqq r' \leqq \infty$ ein endliches Maximum; ferner ist

$$\frac{r'^{\lambda} - r^{\lambda}}{r' - r} = r'^{\lambda-1} \frac{1 - \left(\frac{r}{r'}\right)^{\lambda}}{1 - \frac{r}{r'}} \leqq h r'^{\lambda-1},$$

wo h die größere der Zahlen 1 und λ bezeichnet, und das zweite Glied rechts ist also kleiner als

$$\frac{h}{\lambda r'} \int_1^{r'} \frac{dr}{r^{\lambda}} < \frac{h}{\lambda} \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{\lambda+1}} = \frac{h}{\lambda^2}.$$

Jedenfalls existiert also eine endliche, von r' unabhängige Zahl C', derart daß

$$\int_1^{r'} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{r^{\lambda+1}} dr < C' + \varepsilon(r) \int_1^{r'} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr\,^{1},$$

womit die Ungleichung (1) bewiesen ist.

2. *Herleitung des zweiten Hauptsatzes.* — Mit Hilfe des in der letzten Nummer bewiesenen Satzes ergibt sich leicht der

Satz. — *Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, und a und b zwei von einander verschiedene, endliche komplexe Zahlen. Dann besteht die Ungleichung*

$$(15)\quad T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + N(r, f') - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r),$$

wo $S(r)$ folgenden Bedingungen genügt:

Wenn λ eine positive Zahl bezeichnet, so ist für $r > r_0 > 0$:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S(t)}{t^{\lambda+1}} dt < \varepsilon(r) \int_{r_0}^{r} \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}} dt + 0(1).$$

Ferner ist

$$S(r) < O(\log T(r)) + O(\log r)$$

mit Ausnahme einer Wertmenge r von endlichem Gesamtmaß.

Wenn $f(x)$ von endlicher Ordnung ist, so ist

$$S(r) = O(\log r).$$

Beweis. — Nach dem Korollar (S. 19) des ersten Hauptsatzes ist

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right) + O(1) = m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + O(1).$$

Unter Anwendung der ersten der Ungleichungen (4) folgt ferner, wenn man noch einmal von dem ersten Hauptsatze Gebrauch macht

---

[1] Eine genauere Betrachtung führt sogar zu der schärferen Ungleichung

$$\int_1^{r'} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{r^{\lambda+1}} dr < \text{const.} + \log \int_1^{r'} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr.$$

$$m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f-a} \cdot \frac{f-b}{f'}\right) \leqq m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f-b}{f'}\right)$$
$$= m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) - N\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) + O(1).$$

Beachtet man, daß ein m-facher Pol von f ein $(m+1)$-facher Pol von f' ist, so folgt, daß

$$N\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) = N(r, f') - N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) - N_b\left(r, \frac{1}{f'}\right),$$
$$N\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) = N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N_b\left(r, \frac{1}{f'}\right),$$

wobei $N_b\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ mittels derjenigen Nullstellen von f' gebildet ist, in denen $f = b$. Es wird also

$$N\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) - N\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + N(r, f') - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right),$$

und man sieht, daß die Ungleichung (15) richtig ist, falls man dem Restglied S den Wert

$$S(r) = m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right)$$

gibt. Daß dieser Ausdruck die behaupteten Eigenschaften hat, geht hervor, wenn man den Satz auf S. 51 auf die meromorphen Funktionen $f-a$ und $f-b$ anwendet und bemerkt, daß nach dem ersten Hauptsatze

$$T(r, f-z) = T(r, f) + O(1) \qquad (z = a,\ z = b).$$

Die soeben hergeleitete Ungleichung (15) erhält eine etwas allgemeinere Form, wenn man sie auf die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{\alpha f(x) + \beta}{f(x) - c}$$

anwendet, wo c eine endliche, von a und b verschiedene Zahl ist und die Koeffizienten α und β so bestimmt werden sollen, daß die Werte $f = a$ und $f = b$ invariant bleiben (d. h. in die Werte $\varphi = a$ bzw. $\varphi = b$ übergehen). Man findet: $\alpha = a + b - c$, $\beta = -ab$ und für die Determinante der Transformation den Wert

$$-(\alpha c + \beta) = (a-c)(b-c) \neq 0.$$

Es wird dann

$$N\left(r, \frac{1}{\varphi - z}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-z}\right) \text{ für } z = a,\, b \tag{16}$$

und

$$N(r, \varphi) = N\left(r, \frac{1}{f-c}\right). \tag{16'}$$

Ferner ist

$$\varphi' = (a-c)(b-c)\frac{f'}{(f-c)^2},$$

und also

$$N(r, \varphi') - N\left(r, \frac{1}{\varphi'}\right) = 2N\left(r, \frac{1}{f-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - 2N(r, f) + N(r, f'). \tag{16''}$$

Schließlich besteht nach dem ersten Hauptsatze (Korollar S. 19) die Beziehung

$$T(r, \varphi) = T(r, f) + O(1). \tag{16'''}$$

Wird nun die Ungleichung (15) auf die Funktion $\varphi(x)$ angewandt, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (16) bis (16'''), daß

$$T(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-c}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$$
$$- 2N(r, f) + N(r, f') + S(r),$$

wo $S(r)$ wieder den in dem letzten Satze angegebenen Bedingungen genügt.

In der letzten Ungleichung sind die Zahlen a, b, c nach Voraussetzung von einander verschieden und endlich. Man sieht aber, daß diese Ungleichung auch dann ihre Gültigkeit behält, wenn eine dieser Zahlen unendlich ist. Denn ist z. B. $c = \infty$, so hat man nur statt $N\left(r, \frac{1}{f-c}\right)$ $N(r, f)$ zu schreiben, und die betrachtete Ungleichung geht in die früher bewiesene Beziehung (15) über. Zusammenfassend haben wir also folgendes Endergebnis:

Zweiter Hauptsatz. — *Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion und a, b und c drei von einander verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen. Dann besteht die Ungleichung*

$$T(r) < N(r; a) + N(r; b) + N(r; c) - N_1(r) + S(r), \tag{II}$$

wo

$$N_1(r) = N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + (2N(r, f) - N(r, f')),$$

und $S(r)$ nachstehenden Bedingungen genügt:

1^0 *Wenn λ eine beliebige positive Zahl bezeichnet, so ist für $0 < r_0 < r$*

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt < \varepsilon(r) \int_{r_0}^{r} \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt + O(1)\,[1]. \tag{17}$$

2^0 *Es ist*

$$S(r) < O(\log T(r)) + O(\log r) \tag{17'}$$

für jedes r, mit eventueller Ausnahme einer Wertmenge, die mit einer Intervallfolge von endlicher Gesamtlänge überdeckt werden kann.

3^0 *Wenn $f(x)$ insbesondere von endlicher Ordnung ist, so besteht die letzte Ungleichung ausnahmslos für jedes r von einem gewissen Wert r ab, und es ist also*

$$S(r) = O(\log r) \tag{17''}$$

Es sei sogleich eine Bemerkung über die Bedeutung des Gliedes $-N_1$ auf der rechten Seite der Hauptungleichung (II) hinzugefügt. Der Ausdruck $N_1(r)$ setzt sich aus zwei nichtnegativen Gliedern zusammen: *Das erste Glied* $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ rührt von den Nullstellen der Ableitung f' her; es ist ja nach Definition (falls $f'(0) \neq 0$)

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f'}\right)}{t}\, dt,$$

wo $n\left(t, \frac{1}{f'}\right)$ die Anzahl der Nullstellen von f' im Kreise $|x| < t$ bezeichnet und also auch in folgender Weise definiert werden kann: $n\left(t, \frac{1}{f'}\right)$ ist gleich der Anzahl der *mehrfachen* innerhalb des Kreises $|x| = t$ gelegenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = z$, wobei man alle *endliche* Werte z zu berücksichtigen hat und eine m-fache Wurzel nur $(m-1)$-mal zu zählen ist. In analoger Weise ist nun das *zweite Glied* (falls $f(0) \neq \infty$)

$$2N(r, f) - N(r, f') = \int_0^r \frac{2n(t, f) - n(t, f')}{t}\, dt$$

---

[1] Es gilt sogar die schärfere Beziehung (vgl. die Fußnote S. 59.)

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt < O\left(\log \int_{r_0}^{r} \frac{T(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt\right).$$

mittels der *mehrfachen Pole* der Funktion $f(x)$ gebildet. Die Funktionen f und f' haben nämlich gemeinsame Pole, und zwar ist ein m-facher Pol von f ein $(m+1)$-facher von f'. Der Ausdruck $2n(t, f) - n(t, f')$ ist demnach gleich der Anzahl der innerhalb des Kreises $|x| = t$ gelegenen Pole von $f(x)$, wobei ein m-facher Pol nur $(m-1)$-mal gezählt wird. Wir haben also zur Bestimmung des Ausdrucks $N_1(r)$ nachstehende Regel, die den symmetrischen Bau dieser Größe klar hervortreten läßt:

Man bilde die Anzahl $n_1(r)$ der mehrfachen z-Stellen der betrachteten meromorphen Funktion in dem Kreise $|x| < r$ in der Weise, daß eine m-fache Stelle nur $(m-1)$-mal gezählt wird. Dann ist[1]

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t)}{t} dt.$$

Unter Berücksichtigung dieser Regel ergibt sich aus dem Hauptsatze sogleich folgendes

Korollar. — *Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, und $\bar{n}(r; z)$ die ohne Rücksicht auf die Multiplizitäten gebildete Anzahl ihrer z-Stellen im Kreise $|x| < r$, so daß also jede z-Stelle nur einmal mitgezählt wird. Setzt man dann*

$$\bar{N}(r; z) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t; z)}{t} dt,$$

so ist, wenn a, b und c drei beliebige, von einander verschiedene Zahlen sind,

$$T(r) < \bar{N}(r; a) + \bar{N}(r; b) + \bar{N}(r; c) + S(r), \tag{II'}$$

wo $S(r)$ den in dem Hauptsatze angegebenen Bedingungen genügt.

3. *Einige Anwendungen des zweiten Hauptsatzes.* — Als erste Anwendung der Hauptungleichung (II) wollen wir den Picardschen Satz beweisen:

Eine transzendente meromorphe Funktion nimmt jeden Wert, außer möglicherweise zwei, unendlich oft an.

Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, die *drei* verschiedene Werte a, b und c nur in einer endlichen Anzahl von Punkten annimmt; es ist dann $N(r; z) = O(\log r)$ für diese drei Werte z. Weil nun das Restglied $S(r)$ gemäß (17')

---

[1] Falls der Nullpunkt eine mehrfache, z. B. m_0-fache Stelle ist, so hat man für N_1 den Ausdruck

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t) - m_0 + 1}{t} dt + (m_0 - 1) \log r.$$

der Bedingung $S(r) < O(\log r) + \varepsilon(r)\, T(r)$ außerhalb der unter 2^0 erwähnten Intervalle genügt, so folgt aus der Hauptungleichung, indem man beide Seiten mit $\log r$ dividiert, daß

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{T(r)}{\log r}$$

endlich sein muß. Eine meromorphe Funktion von dieser Art reduziert sich aber nach dem Satze auf S. 35 auf eine *rationale* Funktion, w. z. b. w.[1].

Eine leichte Folgerung aus dem zweiten Hauptsatze ist auch der

Satz 1. — *Seien $f(x)$ eine meromorphe Funktion und $r_\nu(z)$ die absoluten Beträge ihrer z-Stellen. Wenn dann, für ein endliches $\lambda > 0$, die Reihe*

$$\Sigma\left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^\lambda \tag{18}$$

für drei verschiedene Werte z konvergent ist, so konvergiert sie für alle Werte z. Ferner ist auch das Integral

$$\int^\infty \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr \tag{19}$$

konvergent, und $f(x)$ also höchstens vom Konvergenztypus der Ordnung λ.

Weil die Reihe (18) in bezug auf Konvergenz und Divergenz mit dem Integral

$$\int^\infty \frac{N(r;z)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

gleichwertig ist, so ist dieses Integral nach der Voraussetzung für drei verschiedene Werte $z = a, b, c$ konvergent. Die behauptete Konvergenz des Integrals (19) ergibt sich nun aus dem zweiten Hauptsatze, wenn man beide Seiten der Ungleichung (II) mit $\frac{dr}{r^{\lambda+1}}$ multipliziert, von $r = \varrho_0$ bis $r = \varrho$ ($\varrho_0 < \varrho$) integriert und bemerkt, daß das Restglied $S(r)$ die Bedingung (17) erfüllt. Ist aber einmal das Integral (19) konvergent, so konvergiert auch die Reihe (18) für *alle* Werte z (vgl. Satz 1, S. 26), womit unser Satz nachgewiesen ist.

[1] Wenn man nur den PICARDschen Satz beweisen will, so lassen sich die in den vorigen Nummern angestellten Überlegungen wesentlich vereinfachen. Man gelangt so zu einer Beweisanordnung, die gegenüber den früher bekannten „elementaren" Beweisen einige Vorteile besitzen dürfte. Vgl. meine Note *„Beweis des Picard-Landauschen Satzes"*, Gött. Nachrichten, math.-naturw. Klasse, 6. Juni 1924.

Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt insbesondere:

Korollar 1 (Satz von Borel [6]). — *Wenn $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung λ ist, so ist der Grenzexponent der Reihe* (18) *höchstens für zwei Werte z kleiner als λ.*

Korollar 2. — *Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion ist, so ist das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

und die Reihe (18) *für jedes z konvergent, sobald diese Reihe für zwei endliche Werte z konvergiert.*

Den letzten Satz hat zuerst Valiron [12] unter der einschränkenden Voraussetzung gefunden, daß $f(x)$ von endlicher Ordnung ist. In der obigen Fassung, wo sich die Endlichkeit der Ordnung als eine Folgerung der übrigen Voraussetzungen herausstellt, haben wir ihn später in unserer Arbeit [11] bewiesen.

Der zweite Hauptsatz läßt uns aber noch schärfere Schlüsse über die Verteilung der z-Stellen einer meromorphen Funktion von endlicher Ordnung ziehen. Für eine solche Funktion ist nämlich, wenn a, b und c drei verschiedene Zahlen bezeichnen,

$$T(r) < N(r; a) + N(r; b) + N(r; c) + O(\log r),$$

woraus man sieht, daß $N(r; z)$ *höchstens für zwei Werte z von niedrigerem Ordnungstypus* (vgl. die Definitionen S. 23) *sein kann als $T(r)$*. Wendet man dieses Ergebnis insbesondere auf eine *ganze* Funktion an, so gelangt man zu einigen bekannten Sätzen von Wiman [13] und Lindelöf [14], nach welchen die Größe $n(r; z)$ höchstens für *einen* endlichen Wert z von niedrigerem Typus ist als $\log M(r)$.

Die oben besprochenen Sätze über meromorphe Funktionen endlicher Ordnung enthalten eine wesentliche Ergänzung zu den Ergebnissen des zweiten Abschnittes (vgl. Nummer 4). Wir haben dort gesehen, daß eine meromorphe Funktion von *nichtganzzahliger* Ordnung höchstens *einen* Ausnahmewert z hat, für welchen die Funktion $N(r; z)$ von niedrigerem Ordnungstypus als für alle übrigen Werte z ist. Daß dieses Resultat nicht mehr bei *ganzzahligen* Ordnungen gültig ist, wurde durch Beispiele gezeigt; die in dieser Nummer gegebenen Sätze *schränken nun die Anzahl der möglichen Ausnahmewerte auf zwei ein.*

Der obige Satz 1 liefert aber auch einen Beitrag zu einer anderen Frage, die uns in dem zweiten Abschnitt beschäftigt hat. Wir haben gefunden, daß das Geschlecht einer meromorphen Funktion $f(x)$ durch ihre Ordnung eindeutig bestimmt ist außer in dem einzigen Falle, wo $f(x)$ vom *Minimaltypus* einer ganzzahligen Ordnung λ und das Integral

(19) $$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

divergent ist; in diesem Falle ist das Geschlecht entweder λ oder $\lambda - 1$, jenachdem eine der Reihen

$$\Sigma\left(\frac{1}{r_\nu(0)}\right)^\lambda \text{ und } \Sigma\left(\frac{1}{r_\nu(\infty)}\right)^\lambda$$

divergent ist oder beide konvergent sind. Daß dieser letzte Fall als ein ganz besonderer Ausnahmefall zu betrachten ist, geht nun aus dem Satz 1 hervor. Wir schließen insbesondere:

Satz 2. — *Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, und $S(f;\, a, b)$ die Funktion*

$$S(f\,;\, a, b) = \frac{f-a}{f-b},$$

wo a und b zwei verschiedene Zahlen bezeichnen, und für $a = \infty$ und $b = \infty$

$$S(f;\, \infty, b) = \frac{1}{f-b}, \quad S(f;\, a, \infty) = f-a$$

zu schreiben ist.

Wenn $f(x)$ vom Divergenztypus einer ganzzahligen Ordnung λ ist, d. h. wenn das Integral (19) *divergent ist, so existiert höchstens ein einziges Wertpaar a, b, für welches die Funktion S $\left(\text{und dann auch } \frac{1}{S}\right)$ vom Geschlechte $\lambda - 1$ ist.*

Beweis. — Angenommen, daß *zwei* verschiedene Zahlenpaare (a, b) existieren, für welche die Funktion $S(f;\, a, b)$ vom Geschlechte $\lambda - 1$ ist, gibt es wenigstens *drei* verschiedene Werte z, für welche die Reihe (18) konvergent ist; dann wäre aber nach Satz 1 auch das Integral (19), im Widerspruch mit der Voraussetzung, konvergent.

Als Korollar ergibt sich nachstehender Satz von Valiron [12]:

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion von der ganzzahligen Ordnung λ ist, und das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

divergent ist, so existiert höchstens ein endlicher Wert z, für welchen die Funktion $f(x) - z$ vom Geschlechte $\lambda - 1$ ist.

Wir wollen schließlich auf einige Sätze aufmerksam machen, die sich auf die *mehrfachen* z-Stellen einer meromorphen Funktion beziehen und sich als Folgerungen der Hauptungleichung (II) ergeben, wenn man das Glied $N_1(r)$ berücksichtigt. Zunächst ergibt sich sogleich, wenn man die Ungleichung (II') anwendet, folgender Zusatz zu dem obigen Satz 1:

Zusatz 1. — *Der Satz 1 bleibt auch dann gültig, wenn die Reihe* (18) *ohne Rücksicht auf die Multiplizitäten gebildet wird, so daß also jeder z-Stelle ein einziges Glied dieser Reihe entspricht.*

Dieses Ergebnis läßt sich indessen noch wesentlich verschärfen. Wir werden nämlich folgendes beweisen:

Zusatz 2. — *Der Satz 1 behält auch dann seine Gültigkeit, wenn man in der Reihe* (18) *alle Glieder wegläßt, die von z-Stellen von höherer Multiplizität als* d r e i *herrühren.*

Zum Beweise setze man

$$N(r;\ a,b,c) \equiv N(r;\ a) + N(r;\ b) + N(r;\ c)$$

und

$$N(r;\ a,b,c) = N_3(r;\ a,b,c) + N_4(r;\ a,b,c),$$

wo N_3 mittels derjenigen a-, b-, c-Stellen gebildet wird, die höchstens *dreifach* sind, N_4 wiederum von den übrigen mehrfachen a-, b-, c-Stellen herrührt. Nach der Hauptungleichung (II) ist dann

$$T(r) < N_3(r;\ a,b,c) + N_4(r;\ a,b,c) - N_1(r) + S(r). \tag{20}$$

Beachtet man nun die Regel, nach welcher das Glied $N_1(r)$ gebildet ist, so folgt sofort, daß $N_1(r) \geqq \frac{3}{4} N_4(r)$, und also

$$N_4(r;\ a,b,c) - N_1(r) \leqq \tfrac{1}{4} N_4(r;\ a,b,c) \leqq \frac{N(r;\ a,b,c)}{4}.$$

Nach dem ersten Hauptsatze ist aber

$$N(r;\ a,b,c) < 3\,T(r) + O(1),$$

und wir schließen aus (20), daß

$$T(r) < 4 N_3(r;\ a,b,c) + 4 S(r) + O(1). \tag{21}$$

Wird nun die Reihe (18) nach der Vorschrift des zu beweisenden Zusatzes gebildet und ist sie dann für die drei Werte $z = a, b, c$ konvergent, so ist (vgl. den Hilfssatz S. 24) auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{N_3(r;\ a,b,c)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

konvergent, und die behauptete Konvergenz des Integrals

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

folgt aus (21), wie im Beweise des Satzes 1.

Wenn die betrachtete Funktion einen PICARDschen Ausnahmewert besitzt, so läßt sich das letzte Ergebnis noch weiter präzisieren. Man gelangt im Falle einer *ganzen* Funktion durch eine ganz ähnliche Schlußweise, wie die oben durchgeführte, zu folgender Verschärfung des Korollars 2 S. 65:

Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion, für welche die Reihe

$$\Sigma \left(\frac{1}{r_\nu(z)} \right)^{\lambda}$$

für zwei endliche Werte z konvergent ist, wobei die Summation nur über die ein- und zweifachen z-Stellen zu erstrecken ist. Dann ist auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

konvergent, und die Funktion also höchstens von der endlichen Ordnung λ.

Speziell geht hieraus hervor, daß der PICARD-BORELsche Satz, nach welchem der Grenzexponent der z-Stellen einer ganzen Funktion höchstens für *einen* endlichen Wert z kleiner als ihre Ordnung sein kann, auch dann besteht, wenn man nur die ein- und zweifachen Stellen berücksichtigt, ein Ergebnis, das früher bekannt ist (vgl. VALIRON [15], S. 77, 78).

4. *Sätze über das asymptotische Verhalten der Quotienten $\frac{N}{T}$ und $\frac{m}{T}$.* — Verbindet man die Hauptungleichung (II) mit dem *ersten* Hauptsatze, nach welchem die Gleichung

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{N(r;z)}{T(r)} + \frac{m(r;z)}{T(r)} \right) = 1$$

für *jedes z* besteht, so gelangt man zu einigen weiteren Sätzen über das asymptotische Verhalten der Größen m und N, die an Genauigkeit die in der vorigen Nummer besprochenen Sätze weit übertreffen. Eine unmittelbare Folgerung aus unseren zwei Hauptsätzen ist nachstehender

Satz. — *Sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, und a, b, c drei von einander verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen. Es ist dann*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;a)+N(r;b)+N(r;c)}{T(r)} \leqq 3,$$
(22)
$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;a)+N(r;b)+N(r;c)}{T(r)} \geqq 1.$$

Die Ungleichung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} < \tfrac{1}{3}, \quad \left(\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r;z)}{T(r)} > \tfrac{2}{3}\right), \tag{23}$$

kann also höchstens für zwei verschiedene Werte z bestehen.

Hat $f(x)$ einen Ausnahmewert $z = c$, wofür

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;z)}{T(r)} = 0 \left(\text{und somit } \lim_{r=\infty} \frac{m(r;z)}{T(r)} = 1\right), \tag{24}$$

so ist für $a \neq b \neq c$

$$1 \leqq \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;a)+N(r;b)}{T(r)} \leqq 2, \tag{25}$$

und es ist also

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} \geqq \tfrac{1}{2}, \quad \left(\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r;z)}{T(r)} \leqq \tfrac{1}{2}\right) \tag{26}$$

für alle Werte $z \neq c$ außer möglicherweise einem einzigen Wert.

Hat $f(x)$ schließlich zwei Ausnahmewerte $z = a$ und $z = b$, für welche die Beziehung (24) *gültig ist, so ist für alle Werte $z \neq a, b$*

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;z)}{T(r)} = 1, \quad \left(\lim_{r=\infty} \frac{m(r;z)}{T(r)} = 0\right). \tag{27}$$

Falls $f(x)$ von unendlicher Ordnung ist, sind die Beziehungen (22), (25) und (27), insofern sie sich auf die *unteren* Grenzen der betreffenden Quotienten beziehen, nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß man in jedem Fall zuerst eine eventuelle Wertmenge r von endlichem Gesamtmaß ausschließt.

Es ist klar, daß die obigen Ergebnisse auch dann unverändert gelten, wenn man die Größen $N(r;z)$ durch die auf S. 63 definierten Ausdrücke $\overline{N}(r;z)$ ersetzt.

Wenn die betrachtete Funktion insbesondere eine *ganze* Funktion ist, so ist die Bedingung (24) für $z = c = \infty$ erfüllt. In diesem speziellen Fall haben wir die Ungleichung (25) (in etwas weniger scharfer Form) in unserer Arbeit [11] gegeben.

Wir werden schließlich durch einige Beispiele zeigen, daß die in dem obigen Satze gegebenen Unbestimmtheitsgrenzen für die Quotienten $\frac{N}{T}$ und $\frac{m}{T}$ nicht mehr verschärft werden können.

Daß die untere und obere Schranke (1 bzw. 3) in der Formel (22) sich nicht verbessern lassen, ist einleuchtend; interessant ist aber, daß auch in der aus dieser Formel gezogenen Folgerung, daß

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;\, z)}{T(r)} < \tfrac{1}{3}$$

höchstens für *zwei* Werte z sein kann, die Schranke $\frac{1}{3}$ scharf ist: *es existieren* nämlich *meromorphe Funktionen, für welche die Gleichung*

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;\, z)}{T(r)} = \tfrac{1}{3}$$

für drei verschiedene Werte z besteht. Eine solche Funktion ist, wie im folgenden gezeigt werden soll,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \tag{28}$$

wo

$$f(x) = \frac{e^{-\varepsilon x^2}}{(\cos(i x^2))^2}. \tag{28'}$$

$F(x)$ ist eine eindeutige meromorphe Funktion mit einfachen Polen in den durch die Gleichung $i x^2 = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ bestimmten Punkten

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + n)\pi} \,.\, e^{\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \quad (n = 0, 1, \ldots;\ \nu = 0, 1, 2, 3).$$

Es ist also

$$n(r, F) \sim \frac{4r^2}{\pi}, \quad N(r, F) \sim \frac{2r^2}{\pi}. \tag{29}$$

Um die Fundamentalgröße $m(r, F)$ abzuschätzen, bemerke man, daß der Integrand $f(x)$ in den Winkeln

$$\left| \pm \frac{\pi}{2} - \arg x \right| \leqq \frac{\pi}{4} - \delta \qquad (\delta > 0) \tag{30}$$

gleichmäßig gegen den Wert ∞ strebt; es ist nämlich in (30):

$$f(x) = \frac{4e^{-4x^2}}{(1+e^{2x^2})^2} = 4e^{-4x^2}\left(1-\frac{e^{2x^2}}{1+e^{2x^2}}\right)^2$$

und also, da $e^{x^2} \to 0$ für $|x| \to \infty$ in (30),

$$f(x) = 4e^{-4x^2} - 8e^{-2x^2}(1+\varepsilon(x)),$$

wo $\varepsilon(x)$ in den Winkeln (30) für $|x| \to \infty$ gleichmäßig gegen Null strebt. Es wird hiernach

$$F(x) = 4\int_0^x e^{-4t^2}\,dt - 8\int_0^x e^{-2t^2}(1+\varepsilon(t))\,dt.$$

Durch partielle Integration findet man

$$4\int_0^x e^{-4t^2}dt = 4\int_0^{x_0} e^{-4t^2}dt + 4\int_{x_0}^x e^{-4t^2}dt = -\frac{e^{-4x^2}}{2x} + \frac{e^{-4x^2}}{16x^3} + \tfrac{3}{16}\int_{x_0}^x \frac{e^{-4t^2}\,dt}{t^4} + C(x_0),$$

wo $C(x_0)$ eine von x unabhängige Zahl ist, die für $\frac{1}{R} \leqq |x_0| \leqq R$ unter einer nur von $R > 1$ abhängigen endlichen Schranke liegt. Es wird also

$$F(x) = -\frac{e^{-4x^2}}{2x}(1+\eta(x)), \tag{31}$$

wo

$$\eta(x) = -\frac{3x\,e^{4x^2}}{8}\int_{x_0}^x \frac{e^{-4t^2}}{t^4}\,dt + 16x\,e^{4x^2}\int_0^x e^{-2t^2}(1+\varepsilon(t))\,dt - \frac{1}{8x^2} - 2x\,e^{4x^2}C(x_0). \tag{31'}$$

Um die Größe $\eta(x)$ weiter abzuschätzen, wähle man einen Punkt $x = re^{i\varphi}$ innerhalb der Winkel (30) und den Punkt x_0 so, daß $\arg x_0 = \arg x = \varphi$, und $|x_0| < r$. Es wird dann

$$\left|\int_{x_0}^x \frac{e^{-4t^2}}{t^4}\,dt\right| \leqq \int_{|x_0|}^r \frac{e^{-4|t|^2\cos 2\varphi}}{|t^4|}\,d|t|.$$

Hier ist der Integrand für $|t| \geqq \sqrt{-\frac{1}{2\cos 2\varphi}}$ eine wachsende Funktion ihres Argumentes. Bemerkt man, daß $-\cos 2\varphi \geqq \sin 2\delta$ innerhalb der Winkel (30) ist, so folgt, daß der Integrand sicher in dem Integrationsintervall $|x_0| \leqq |t| \leqq r$ sein Maximum für $|t| = r$ erreicht, wenn $|x_0| = \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\delta}}$ gewählt wird. Für das erste Glied rechts in (31′) ergibt sich dann die obere Schranke

$$\tfrac{3}{8}\,|x\,e^{4x^2}|\left|\frac{e^{-4x^2}}{x^4}\right|\left|\int_{|x_0|}^{|x|} d\,|t|\right| < \frac{3}{8|x|^3};$$

das betrachtete Glied strebt also in (30) für $|x| \to \infty$ gleichmäßig gegen Null.

In derselben Weise verhält sich das zweite Glied rechts in (31′), denn es ist

$$\left|\int_0^x e^{-2t^2}\,dt\right| \leqq \int_0^{|x|} |e^{-2t^2}|\,d\,|t| \leqq |x\,e^{-2x^2}|,$$

und daher

$$|x\,e^{4x^2}|\left|\int_0^x e^{-2t^2}(1+\varepsilon(t))\,dt\right| < (1+\varepsilon(|x|))\,|x^2\,e^{2x^2}|.$$

Da auch die zwei letzten Glieder in (31′) für $|x| \to \infty$ verschwinden. so gilt

$$\eta(x) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty$$

gleichmäßig in den Winkeln (30).

Nach (31) besteht also innerhalb (30) die asymptotische Formel

$$\text{(32)} \quad \log\left|F(re^{i\varphi})\right| = -4r^2\cos 2\varphi - \log 2r + \varepsilon(r) = -4r^2\cos 2\varphi\,(1+\varepsilon(r)).$$

In den Winkeln

$$\text{(33)} \quad |\varphi| \leqq \frac{\pi}{4} - \delta \text{ und } |\pi - \varphi| \leqq \frac{\pi}{4} - \delta$$

gilt die asymptotische Darstellung

$$\text{(34)} \quad f(x) = \frac{4\,e^{-8x^2}}{(1+e^{-2x^2})^2} = 4e^{-8x^2}(1+\varepsilon(x)),$$

und man schließt mittels des Cauchyschen Integralsatzes, daß $F(x)$ in diesen Winkeln gleichmäßig gegen die endlichen Werte

$$\text{(35)} \quad a = \int_0^\infty \frac{e^{-8u^2}}{(1+e^{-2u^2})^2}\,du \text{ bzw. } -a$$

strebt. Es existiert also eine endliche Zahl A derart, daß die Ungleichung

$$\text{(36)} \quad |F(x)| < A$$

innerhalb der Winkel (33) besteht.

Es erübrigt uns noch, das Verhalten von $F(x)$ innerhalb der Winkel

$$\left|\frac{\pi}{4}+\nu\cdot\frac{\pi}{2}-\varphi\right|\leqq\delta \qquad (\nu=0,1,2,3) \tag{37}$$

zu untersuchen. Hierzu schließen wir die Nullstellen von $\cos(ix^2)$ durch kleine Kreise C aus der komplexen x-Ebene aus, so daß in der ganzen übrigbleibenden Ebene $|\cos^2(ix^2)|>k$, wo k eine von x unabhängige positive Zahl ist. Es ist dann nach (28′) auf jedem vollständig außerhalb der Scheiben C gelegenen Kreis $|x|=r$

$$|f(x)|<\frac{e^{6r^2}}{k} \text{ und also für } 0\leqq|\varphi|<\pi,$$

$$\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \left|F(r)+i\int_0^{\varphi}f\left(re^{i\vartheta}\right)re^{i\vartheta}d\vartheta\right|\leqq A+r\int_0^{\varphi}\left|f\left(re^{i\vartheta}\right)\right|d\vartheta$$
$$<A+\frac{\pi r}{k}\cdot e^{6r^2},$$

oder .

$$\log\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|<6r^2(1+\varepsilon(r)) \text{ außerhalb } C. \tag{38}$$

Für die Fundamentalgröße $m(r;F)=m(r;\infty)$ haben wir nun den Ausdruck

$$m(r;\infty)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\left|\pm\frac{\pi}{2}-\varphi\right|\leqq\frac{\pi}{4}-\delta}\overset{+}{\log}\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\varphi|\leqq\frac{\pi}{4}+\delta}\overset{+}{\log}\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi \tag{39}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\pi-\varphi|\leqq\frac{\pi}{4}+\delta}\overset{+}{\log}\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi.$$

Es ist demnach gemäß (32)

$$m(r;\infty)\geqq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\left|\pm\frac{\pi}{2}-\varphi\right|\leqq\frac{\pi}{4}-\delta}\overset{+}{\log}\left|F\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi=(1+\varepsilon(r))\frac{4\cos 2\delta}{\pi}r^2.$$

Andererseits ist nach (36) und (38)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\varphi|\leqq\frac{\pi}{4}+\delta}\overset{+}{\log}|F|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\varphi|\leqq\frac{\pi}{4}-\delta}\overset{+}{\log}|F|d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\left|\pm\frac{\pi}{4}-\varphi\right|\leqq\delta}\overset{+}{\log}|F|d\varphi$$
$$<\frac{\overset{+}{\log}A}{4}+\frac{12\delta r^2}{\pi}(1+\varepsilon(r));$$

eine ähnliche Abschätzung gilt auch für das dritte Glied rechts in (39), und es wird also

$$m(r;\,\infty) < \frac{4\cos 2\delta + 24\delta}{\pi}\, r^2 (1+\varepsilon(r)),$$

wenn r so gewählt wird, daß der Kreis $|x| = r$ nicht die Kreisscheiben C schneidet. Bezeichnet nun ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann man δ so klein wählen, daß die Ungleichungen

$$1-\varepsilon < \frac{\pi\, m(r;\,\infty)}{4r^2} < 1+\varepsilon$$

von einem gewissen Wert r ab bestehen; es ist demnach

$$m(r;\,\infty) \sim \frac{4r^2}{\pi}$$

und nach (29)

$$T(r) \equiv m(r;\,\infty) + N(r;\,\infty) \sim \frac{6r^2}{\pi}. \tag{40}$$

Hierbei soll man r zunächst so wählen, daß der Kreis $|x| = r$ außerhalb der Kreise C liegt; da aber $T(r)$ eine *wachsende* Funktion von r ist, so überzeugt man sich sofort davon, daß die asymptotische Formel (40) auch ohne diese Einschränkung gültig ist.

Wir wollen nun das asymptotische Verhalten unserer Funktion $F(x)$ in dem Winkel

$$|\varphi| \leqq \frac{\pi}{4} - \delta \tag{41}$$

näher untersuchen. Wir haben schon bemerkt, daß $F(x)$ daselbst für $|x| \to \infty$ gleichmäßig gegen den durch (35) definierten Wert a strebt. Für die Differenz $F-a$ hat man nach (34) die Abschätzung

$$\left|F\left(re^{i\varphi}\right) - a\right| = \left|\int_r^\infty f\left(te^{i\varphi}\right)dt\right| \leqq \int_r^\infty \left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right| dt = (1+\varepsilon(r))\, 4\int_r^\infty e^{-8t^2\cos 2\varphi}\, dt.$$

Nun ist der Ausdruck $t^2 e^{-8t^2\cos 2\varphi}$ für $t > \dfrac{1}{2\sqrt{2\cos 2\varphi}}$ eine abnehmende Funktion von t. Nimmt man also $r > \dfrac{1}{2\sqrt{2\sin 2\delta}}$, so wird innerhalb (41)

$$\left|F\left(re^{i\varphi}\right) - a\right| < (1+\varepsilon(r))\, 4r^2 e^{-8r^2\cos 2\varphi} \int_r^\infty \frac{dt}{t^2} = (1+\varepsilon(r))\, 4re^{-8r^2\cos 2\varphi},$$

und also

$$\log\left|F\left(re^{i\varphi}\right)-a\right| < -8r^2\cos 2\varphi\,(1+\varepsilon(r)).$$

Man findet hiernach, daß

$$m(r\,;\,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{F\left(re^{i\varphi}\right)-a}\right| > \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\varphi|\leqq\frac{\pi}{4}-\delta} 8r^2\cos 2\varphi\,(1+\varepsilon(r))\,d\varphi$$

$$= \frac{4r^2\cos 2\delta}{\pi}(1+\varepsilon(r)).$$

Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ kann man also ein so kleines δ wählen, daß

$$m(r\,;\,a) > \frac{4r^2}{\pi}(1-\varepsilon)$$

von einem gewissen Wert r ab, und es ist also nach (40)

$$N(r\,;\,a) = T(r)-m(r\,;\,a)+O(1) < (1+\varepsilon(r))\,\frac{2r^2}{\pi}. \tag{42}$$

In dem Winkel $|\pi-\varphi| \leqq \frac{\pi}{4}-\delta$ hat $F(x)$ wiederum den asymptotischen Wert $-a$, und es wird, durch eine ähnliche Rechnung, wie die oben durchgeführte,

$$N(r,\,-a) < (1+\varepsilon(r))\frac{2r^2}{\pi}. \tag{43}$$

Die Beziehungen (29), (40), (42) und (43) zeigen nun, daß die Ungleichung

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\,\frac{N(r\,;\,z)}{T(r)} \leqq \tfrac{1}{3}$$

für die *drei* Werte $z = \infty$, $z = a$, $z = -a$ besteht. Tatsächlich muß für diese drei Werte z

$$\lim_{r=\infty}\frac{N(r\,;\,z)}{T(r)} = \tfrac{1}{3}$$

sein, denn sonst würde ein Widerspruch mit der Hauptungleichung (II) entstehen, wenn $b = -a$, $c = \infty$ gesetzt wird. Die betrachtete meromorphe Funktion besitzt also die behaupteten asymptotischen Eigenschaften.

Wenn eine meromorphe Funktion einen Ausnahmewert $z = c$ besitzt, wofür

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;z)}{T(r)} = 0, \tag{44}$$

so gilt (vgl. den obigen Satz S. 68) die Ungleichung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} \geqq \tfrac{1}{2} \tag{45}$$

für alle Werte $z \neq c$ außer möglicherweise einem einzigen. Insbesondere besteht diese Ungleichung bei einer *ganzen* Funktion (die ja der Bedingung (44) für $z = \infty$ genügt) für alle endlichen z außer höchstens einem Ausnahmewert. In meiner Arbeit [11] über den Picardschen Satz, wo ich dieses letzte Ergebnis angegeben habe, habe ich die Frage gestellt, ob nicht möglicherweise schon die schärfere Beziehung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} = 1$$

für jedes z mit eventueller Ausnahme eines einzigen Wertes bestehe. Wie Herr Littlewood mir neuerdings freundlichst mitgeteilt hat, ist diese Frage zu verneinen; er bemerkt, daß die ganze Funktion

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt \tag{46}$$

der Ungleichung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} < 1$$

für die *zwei* endlichen Werte

$$z = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt \quad \text{und} \quad z = -\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$$

genügt[1]. Eine leichte Rechnung zeigt daß für diese zwei Werte z sogar:

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;z)}{T(r)} = \tfrac{1}{2}.$$

Aus diesem Beispiel geht also hervor, daß die von uns in (45) gegebene untere Schranke $\frac{1}{2}$ sich nicht erhöhen läßt.

Die Gültigkeit des Picard-Borelschen Satzes, wonach eine meromorphe Funktion höchstens *zwei Ausnahmewerte* z (eine ganze Funktion also nur *einen*

[1] Herr Littlewood teilt mir mit, daß Herr Collingwood zuerst diese Bemerkung gemacht hat.

endlichen Ausnahmewert) besitzen kann, für welche die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = z$$

mit anormal kleiner Dichtigkeit vorhanden sind, hängt wesentlich davon ab, wie feine Unterschiede in den Wurzeldichten für verschiedene Werte z berücksichtigt werden, und wie scharf man dementsprechend den Begriff des „Ausnahmewertes" definiert. Ein Ausnahmewert im Sinne PICARDS ist ein Wert z, der von $f(x)$ überhaupt nicht (oder höchstens in einer endlichen Anzahl von Punkten) angenommen wird, ein BOREL-BLUMENTHALscher Ausnahmewert eine Zahl z, für welche *die Ordnung* der Größe N (bzw. n) niedriger als die Ordnung der Funktion ist. Einige weitere Verschärfungen des PICARD-BORELschen Satzes (für ganze Funktionen) von WIMAN, LINDELÖF, VALIRON und uns haben wir im Laufe der obigen Untersuchung besprochen. Durch unsere obigen Ergebnisse ist nun die Frage nach der möglichst scharfen Definition des „Ausnahmewertes" zu einem gewissen Abschluß gebracht: will man den Wortlaut des PICARD-BORELschen Satzes beibehalten, so ist ein Ausnahmewert durch die Ungleichung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} < \tfrac{1}{3} \tag{47}$$

im Falle einer meromorphen Funktion charakterisiert; im Falle einer ganzen Funktion lautet die Definition wiederum:

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} < \tfrac{1}{2}. \tag{47'}$$

Die oben angegebenen Beispiele zeigen, daß die rechts stehenden Schranken sich nicht erhöhen lassen.

Es sei schließlich darauf aufmerksam gemacht, daß der PICARDsche Ausnahmefall, wenn man einen Ausnahmewert durch die Beziehung (47) bezw. (47′) definiert, auch bei Funktionen von endlicher, *nichtganzzahliger* Ordnung eintreffen kann. In der in Nummer 2 des zweiten Abschnitts betrachteten ganzen Funktion haben wir ein Beispiel, wo die Ungleichung (47) für *zwei* Werte, $z = 0$ und $z = \infty$ (und die Ungleichung (47′) also für einen endlichen Wert z) besteht, sobald die Ordnung λ hinreichend groß gewählt wird.

IV. Über analytische Funktionen, die im Einheitskreise eindeutig und meromorph sind.

Die in den drei ersten Abschnitten dieser Arbeit angestellten Untersuchungen beziehen sich auf die asymptotischen Eigenschaften analytischer Funktionen, die in der ganzen endlichen Ebene eindeutig und meromorph sind. Es wurde schon in der Einleitung hervorgehoben, daß man durch leichte Verallgemeinerung der hierbei benutzten funktionentheoretischen Grundformeln die oben bewiesenen Sätze auf Funktionen erweitern kann, die nur in *einer gewissen Umgebung* des Unendlichkeitspunktes eindeutig und meromorph sind. Unwesentlich ist selbstverständlich auch, daß die isolierte singuläre Stelle, in deren Umgebung die Eigenschaften der betreffenden meromorphen Funktionen untersucht werden, in dem unendlich fernen Punkt liegt. Wie unsere Ergebnisse in den angedeuteten allgemeineren Fällen zu modifizieren sind, ist einleuchtend und dürfte es überflüssig sein auf diese Frage hier näher einzugehen. Nun ist es aber interessant, daß ein großer Teil der oben bewiesenen Sätze in leicht modifizierter Form und mit fast unveränderten Beweisen auch für analytische Funktionen bestehen, die nur innerhalb eines *endlichen Gebietes,* z. B. des Einheitskreises eindeutig und meromorph sind. Wir wollen in diesem letzten Abschnitt in aller Kürze einige der wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionenklasse erörtern.

1. *Der erste Hauptsatz. Einige Sätze über meromorphe Funktionen, die im Einheitskreise von endlicher Ordnung sind.* — Die in den zwei ersten Nummern des ersten Abschnitts gegebenen Sätze kann man ohne weiteres auf Funktionen anwenden, die nur innerhalb des Einheitskreises eindeutig und meromorph sind. Es gilt insbesondere auch in diesem Falle das fundamentale Ergebnis:

Erster Hauptsatz. — *Zu jeder innerhalb des Einheitskreises meromorphen, nichtkonstanten Funktion gehört eine wachsende Funktion von* r, $T(r, f) \equiv T(r)$, *von der Art, daß die Gleichung*

$$\text{(I)} \qquad m(r; z) + N(r; z) = T(r) + O(1),$$

für jedes z besteht; $O(1)$ bezeichnet hierbei eine für $0 \leqq r < 1$ beschränkte Größe.
Als Funktion von $\log r$ ist $T(r)$ konvex.

Unverändert gilt auch das

Korollar. — *Wenn die Determinante der Zahlen α, β, γ, δ von Null verschieden ist, so ist*

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) + O(1).$$

Weil die zu einer meromorphen Funktion gehörige Fundamentalgröße T eine wachsende Funktion von r ist, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{r=1} T(r) \equiv T(1).$$

Die betrachteten meromorphen Funktionen zerfallen in zwei Hauptklassen je nachdem $T(1)$ *endlich* oder *unendlich* ist.

Die Funktionen, für welche $T(1)$ endlich ist, besitzen die im nachstehenden Satze ausgesprochene fundamentale Eigenschaft:

Satz. — *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine innerhalb des Einheitskreises eindeutige meromorphe Funktion sich als Quotient von zwei beschränkten Funktionen darstellen läßt, ist, daß $T(r)$ für $r < 1$ beschränkt ist.*

Den Beweis, der leicht mittels der Poisson-Jensenschen Formel gelingt, habe ich neuerdings an anderer Stelle [16] veröffentlicht und will deshalb bei dieser Gelegenheit nicht näher auf ihn eingehen.

Wenn $f(x)$ zu der betrachteten Funktionsklasse gehört, so existieren selbstverständlich unendlich viele beschränkte Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ derart, daß

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ist, auch dann, wenn diese Funktionen der Bedingung

$$|\varphi(x)| \leqq 1, \quad |\psi(x)| \leqq 1 \quad \text{für } |x| < 1$$

unterworfen werden. In meiner soeben zitierten Arbeit habe ich gezeigt, daß unter allen möglichen Funktionen φ und ψ zwei wohlbestimmte φ^* und ψ^* existieren, die sich durch die Extremaleigenschaft

$$|\varphi^*(x)| \geqq |\varphi(x)|, \quad |\psi^*(x)| \geqq |\psi(x)| \quad \text{für } |x| < 1$$

auszeichnen.

Verbindet man den obigen Satz mit einem bekannten FATOUschen Satz [17] über die Existenz von Randwerten beschränkter Funktionen, so ergibt sich das

Korollar. — *Wenn die zu einer meromorphen Funktion gehörige Größe $T(r)$ für $r < 1$ beschränkt ist, so besitzt die Funktion bei radialer Annäherung an den Rand $|x| = 1$ fast überall wohlbestimmte Randwerte.*

Dieser Satz enthält als spezielle Fälle sämtliche früher bekannte Erweiterungen des FATOUschen Satzes (vgl. insb. [18], [19] und [20]).

Wenn $T(r)$ für $r \to 1$ über alle Grenzen wächst, liegt es nahe das Anwachsen von $T(r)$ mit einer Potenz $\left(\frac{1}{1-r}\right)^\lambda$ zu vergleichen, und folgende Definition aufzustellen:

Definition. — *Wenn $f(x)$ eine für $|x| < 1$ meromorphe Funktion ist, so heißt die obere Grenze*

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log T(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

die Ordnung von $f(x)$.

Da $T(r)$ eine wachsende Funktion von r ist, so folgt, daß $f(x)$ dann und nur dann von der endlichen Ordnung k $\left(\text{oder, wie wir das auch ausdrücken, } T(r) \text{ von der Ordnung } \left(\frac{1}{1-r}\right)^k\right)$ ist, wenn das Integral

$$\int^1 T(r)(1-r)^{\lambda-1}\,dr$$

für $\lambda > k$ konvergent, für $\lambda < k$ divergent ist. Wenn dieses Integral für $\lambda = k$ konvergiert, so sagen wir $T(r)$ sei vom *Konvergenztypus* der Ordnung $\left(\frac{1}{1-r}\right)^k$; sonst sei sie vom *Divergenztypus.* Der erstgenannte Fall kann nur dann eintreffen, wenn T vom Minimaltypus der betrachteten Ordnung ist, d. h. wenn

$$\lim_{r=1} T(r)(1-r)^k = 0.$$

Es sei nun $f(x)$ insbesondere für $r < 1$ *regulär.* Die Fundamentalgröße T

reduziert sich dann auf

$$T(r) = m(r;\, \infty),$$

und es ist, wenn $M(r)$, wie vorher, den Maximalmodul von $f(x)$ für $|x| = r < 1$ bezeichnet, für jedes $0 < r < \varrho < 1$ (vgl. S. 22)

$$T(r) \leqq \log M(r) \leqq \frac{\varrho + r}{\varrho - r}\, T(\varrho). \tag{1}$$

Wenn nun $f(x)$ von der endlichen Ordnung λ ist, so folgt aus (1) einerseits, daß die Größe $\log M(r)$ nicht von niedrigerer Ordnung als $T(r)$ sein kann, und andererseits, indem man $\varrho = \frac{1+r}{2}$ setzt, daß sie höchstens von der Ordnung $\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda+1}$ ist. Tatsächlich können die Größen $T(r)$ und $\log M(r)$ von *verschiedenen* Ordnungen sein, was im Falle einer in der ganzen endlichen Ebene regulären Funktion nicht möglich war (vgl. S. 23). So ist z. B. für die Funktion

$$e^{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\lambda+1}}$$

$\log M(r)$ von der Ordnung $\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda+1}$, während die Ordnung von $T(r)$ gleich $\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}$ ist, falls $\lambda > 0$; im Falle $\lambda = 0$ ist $T(r)$ für $r \leqq 1$ *beschränkt*, $\log M(r)$ wiederum gleich $\frac{1+r}{1-r}$.

Wir werden im folgenden einige einfache Eigenschaften meromorpher Funktionen besprechen, die im Einheitskreise von *endlicher* Ordnung sind. Zu diesem Zweck brauchen wir zunächst den

Hilfssatz 1. — *Wenn $r_\nu(z)$ die absoluten Beträge einer innerhalb des Einheitskreises meromorphen Funktion sind, und λ eine positive Zahl bezeichnet, so sind die Integrale*

$$\int^1 N(r;\, z)\,(1-r)^{\lambda-1}\,dr, \quad \int^1 n(r;\, z)\,(1-r)^{\lambda}\,dr$$

und die Reihe

$$\sum (1 - r_\nu(z))^{\lambda+1} \tag{2}$$

gleichzeitig konvergent oder divergent.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Identitäten $(0 < \varrho_0 < \varrho < 1)$:

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} N(r;z)(1-r)^{\lambda-1}\,dr = \frac{(1-\varrho_0)^\lambda}{\lambda} N(\varrho_0;z) - \frac{(1-\varrho)^\lambda}{\lambda} N(\varrho;z) + \frac{1}{\lambda}\int_{\varrho_0}^{\varrho} n(r;z)(1-r)^\lambda \frac{dr}{r}$$

und

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} n(r;z)(1-r)^\lambda\,dr$$

$$= \frac{(1-\varrho_0)^{\lambda+1}}{\lambda+1} n(\varrho_0;z) - \frac{(1-\varrho)^{\lambda+1}}{\lambda+1} n(\varrho;z) + \frac{1}{\lambda+1} \sum_{\varrho_0 < r_\nu < \varrho} (1-r_\nu(z))^{\lambda+1}$$

durch eine ähnliche Überlegung, wie auf S. 24.

Die zuletztgeschriebene Gleichung besteht auch für $\lambda = 0$, woraus man schließt, daß die Reihe (2), wenn $\lambda = 0$, mit dem Integral

$$\int^1 n(r;z)\,dr$$

in Bezug auf Konvergenz und Divergenz gleichwertig ist. Nach der Definition der Größe $N(r;z)$ ist dieses Integral wiederum dann und nur dann konvergent, wenn $N(r;z)$ für $r \to 1$ *beschränkt* ist; wir erhalten so den

Hilfssatz 2. — *Notwendig und hinreichend, damit die Reihe*

$$\sum (1-r_\nu(z))$$

konvergent ist, ist daß die Größe $N(r;z)$ für $r < 1$ beschränkt ist.

Es sei nun $f(x)$ eine meromorphe Funktion von *endlicher* Ordnung; es existiert also eine endliche Zahl $\lambda > 0$ derart, daß das Integral

$$\int^1 T(r)(1-r)^{\lambda-1}\,dr \tag{3}$$

konvergiert. Aus dem ersten Hauptsatze schließen wir dann, daß die Integrale

$$\int^1 m(r;z)(1-r)^{\lambda-1}\,dr \quad \text{und} \quad \int^1 N(r;z)(1-r)^{\lambda-1}\,dr \tag{4}$$

für *jedes* z konvergent sind. Wenn umgekehrt beide Integrale (4) für *einen* Wert z konvergieren, so ist das Integral (3) konvergent. Mittels des ersten Hilfssatzes schließt man hieraus:

Satz 1. — *Wenn, für ein gegebenes $\lambda > 0$, das Integral*

$$\int^1 m(r;z)(1-r)^{\lambda-1}\,dr$$

und die Reihe

$$\sum (1 - r_\nu(z))^{\lambda+1}$$

beide für einen Wert z konvergieren, so sind sie für alle Werte z konvergent.

In ähnlicher Weise folgt aus dem ersten Hauptsatze in Verbindung mit dem zweiten Hilfssatze:

Satz 2. — *Wenn die Größe $m(r; z)$ und die Summe*

$$\sum_{r_\nu < r} (1 - r_\nu(z))$$

für einen Wert z für $r < 1$ beschränkt sind, so gilt dasselbe für alle Werte z.

2. *Der zweite Hauptsatz.* — Die Überlegungen, welche uns in den zwei ersten Nummern des vorigen Abschnittes zu *dem zweiten Hauptsatze* geführt haben, sind zum größten Teil auch dann gültig, wenn man das Variabilitätsgebiet von r auf das Intervall $0 < r < 1$ einschränkt. Mit unverändertem Beweis gilt der Hilfssatz auf S. 52, der jetzt folgende Fassung erhält:

Hilfssatz. — *Wenn $f(x)$ eine für $|x| < 1$ meromorphe Funktion ist, so genügt ihre logarithmische Ableitung für $\frac{1}{2} \leqq r < \varrho < 1$ der Ungleichung*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 3 \log \frac{1}{\varrho - r} + 4 \overset{+}{\log}\, T(\varrho, f) + O(1), \tag{5}$$

wo $O(1)$ eine Größe bezeichnet, die für $r < 1$ beschränkt ist.

Eine leichte Folgerung aus der Beziehung (5) ist der

Satz. — *Unter der Voraussetzung des obigen Hilfssatzes ist für $\lambda > 0$, $0 < r_0 < r' < 1$:*

$$\int_{r_0}^{r'} m\left(r, \frac{f'}{f}\right)(1-r)^{\lambda-1} dr < \varepsilon(r') \int_{r_0}^{r'} T(r, f)(1-r)^{\lambda-1} dr + O(1), \tag{6}$$

wo $\varepsilon(r)$ eine für $r \to 1$ verschwindende Größe bezeichnet.

Falls $f(x)$ insbesondere von endlicher Ordnung ist, so gilt

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right). \tag{7}$$

Beweis. — Wenn $f(x)$ von endlicher Ordnung ist, so existiert eine Zahl $\lambda > 0$ derart, daß

$$T(r) = O\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}\right).$$

Die Behauptung (7) folgt nun aus der Ungleichung (5), wenn man dort $\varrho = \frac{1+r}{2}$ setzt.

Um die Relation (6) zu beweisen, wähle man eine beliebige Zahl r' des Intervalles $\frac{1}{2} < r' < 1$ und setze

$$\varrho = \frac{r+r'}{2}. \tag{8}$$

Dann multipliziere man beide Seiten von (5) mit $(1-r)^{\lambda-1}\,dr$, wo $\lambda > 0$, und integriere von $r = \frac{1}{2}$ bis $r = r'$. Eine leichte Rechnung zeigt, daß die von dem ersten und dritten Glied der rechten Seite herrührenden Integrale unter einer endlichen von r' unabhängigen Schranke liegen (vgl. die Fußnote S. 58). Beachtet man, daß nach (8): $(1-\varrho) < 1-r < 2(1-\varrho)$, $dr = 2\,d\varrho$, so ergibt sich ferner:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{r'} \overset{+}{\log}\, T(\varrho)\,(1-r)^{\lambda-1}\,dr < 2^{\lambda}\int_{r=\frac{1}{2}}^{r'} \overset{+}{\log}\, T(\varrho)\,(1-\varrho)^{\lambda-1}\,d\varrho < 2^{\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^{r'} \overset{+}{\log}\, T(r)\,(1-r)^{\lambda-1}\,dr$$

$$= \varepsilon(r')\int_{\frac{1}{2}}^{r'} T(r)(1-r)^{\lambda-1}\,dr + O(1),$$

womit die Ungleichung (6) bewiesen ist.

Da die in der zweiten Nummer des vorigen Abschnittes angestellten Betrachtungen unverändert ihre Gültigkeit beibehalten, so gelangen wir zu unserem Endziel:

Zweiter Hauptsatz. — *Es sei $f(x)$ eine Funktion, die innerhalb des Einheitskreises meromorph ist. Bezeichnen a, b, c drei voneinander verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen, so besteht für $r < 1$ die Ungleichung*

$$T(r) < N(r;\,a) + N(r;\,b) + N(r;\,c) - N_1(r) + S(r), \tag{II}$$

wo der Ausdruck $N_1(r)$ in der auf S. 63 angegebenen Weise mittels der multiplen z-Stellen von $f(x)$ gebildet wird, und das Restglied $S(r)$ nachstehende Eigenschaften besitzt:

1^0 *Wenn $\lambda > 0$ ist, so gilt für $0 < r_0 < r < 1$:*

$$\int_{r_0}^{r} S(t)(1-t)^{\lambda-1}\,dt < \varepsilon(r)\int_{r_0}^{r} T(t)(1-t)^{\lambda-1}\,dt, \tag{9}$$

wo $\varepsilon(r) \to 0$ für $r \to 1$.

2^0 *Falls $f(x)$ von endlicher Ordnung ist* $\left(\text{d. h. } \log T(r) = O\left(\log\frac{1}{1-r}\right)\right)$, *so ist*

$$S(r) = O\left(\log\frac{1}{1-r}\right). \tag{10}$$

Wir machen im folgenden auf einige einfache Folgerungen aus der Hauptungleichung (II) aufmerksam, die den auf S. 64 gegebenen Folgesätzen der entsprechenden Beziehung (II) (S. 61) analog sind. Durch Multiplikation mit $(1-r)^{\lambda-1}dr$ $(\lambda > 0)$ und Integration findet man aus (II) unter Beachtung der Eigenschaft (9) des Restgliedes $S(r)$:

$$(1-\varepsilon(r))\int_{r_0}^{r} T(t)(1-t)^{\lambda-1}dt < \int_{r_0}^{r}(N(t;a)+N(t;b)+N(t;c)-N_1(t))(1-t)^{\lambda-1}dt + O(1). \tag{11}$$

Mittels des Hilfssatzes 1 S. 81 folgt hieraus zunächst:

Satz 1. — *Wenn, für ein gegebenes $\lambda > 0$, die Reihe*

$$\sum (1-r_\nu(z))^{\lambda+1}$$

für drei verschiedene Werte z konvergent ist, so konvergiert sie für jedes z. Die betreffende meromorphe Funktion gehört höchstens dem Konvergenztypus der Ordnung λ an.

Es ist klar, daß man diesen Satz in ähnlicher Weise wie den analogen Satz auf S. 64 (durch Berücksichtigung der Einwirkung der von den multiplen Stellen herrührenden Größe $N_1(r)$) verschärfen kann.

Ferner folgt aus den obigen Beziehungen (II), (10) und (11) in Verbindung mit dem ersten Hauptsatze:

Satz 2. — *Es sei $f(x)$ eine für $|x| < 1$ meromorphe Funktion, die von positiver Ordnung oder der Ordnung Null ist und der Bedingung*

$$\overline{\lim_{r=1}}\ \frac{T(r)}{\log\frac{1}{1-r}} = \infty \tag{12}$$

genügt. Bezeichnen dann a, b, c drei voneinander verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen, so gilt

$$1 \leqq \overline{\lim_{r=1}}\ \frac{N(r;a)+N(r;b)+N(r;c)}{T(r)} \leqq 3. \tag{13}$$

Die Ungleichung

$$\overline{\lim_{r=1}}\, \frac{N(r;z)}{T(r)} < \tfrac{1}{3}$$

kann also höchstens für zwei verschiedene Werte z bestehen.

Besitzt die Funktion insbesondere einen Ausnahmewert $z = c$, für welchen

$$\lim_{r=1} \frac{N(r;z)}{T(r)} = 0, \tag{14}$$

so gilt für jedes $a \neq b \neq c$

$$1 \leqq \overline{\lim_{r=1}}\, \frac{N(r;a)+N(r;b)}{T(r)} \leqq 2, \tag{15}$$

und es ist demnach

$$\overline{\lim_{r=1}}\, \frac{N(r;z)}{T(r)} \geqq \tfrac{1}{2}$$

für jedes $z \neq c$ außer möglicherweise einem einzigen Wert.

Hat $f(x)$ schließlich zwei verschiedene Ausnahmewerte $z = a$ und $z = b$, für welche die Bedingung (14) besteht, so ist für alle übrigen Werte z

$$\overline{\lim_{r=1}}\, \frac{N(r;z)}{T(r)} = 1. \tag{16}$$

Falls die betrachtete meromorphe Funktion insbesondere von *endlicher* Ordnung im Einheitskreise ist, und die Fundamentalgröße T der Bedingung

$$\lim_{r=1} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty$$

genügt, so sind die obigen Beziehungen (13), (15) und (16) auch dann gültig, wenn man die oberen Grenzen $\overline{\lim}$ durch die unteren $\underline{\lim}$ ersetzt.

Eine Frage von besonderem Interesse ist, ob die Größenordnung des Restgliedes $S(r)$ der Hauptungleichung (II) im Falle einer Funktion endlicher Ordnung durch die Abschätzung

$$S(r) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right) \tag{17}$$

richtig getroffen ist, und ob also die Bedingung (12) die wahre Gültigkeitsgrenze des obigen Satzes ausdrückt. Mittels der Modulfunktion $\omega(x)$ sieht man zunächst leicht ein, daß das Restglied $S(r)$ *nicht* für $r < 1$ *beschränkt* sein kann. Diese Funktion nimmt nämlich die drei Werte $a = 0$, $b = 1$, $c = \infty$ überhaupt nicht an, und die Ungleichung (II) ergibt also

$$T(r, \omega) < S(r). \tag{18}$$

Wäre nun $S(r) = O(1)$, so wäre auch $T(r, \omega)$ für $r < 1$ *beschränkt*, und die Modulfunktion hätte nach dem Korollar S. 80 bei radialer Annäherung an die Peripherie des Einheitskreises fast überall wohlbestimmte Randwerte, was im Widerspruch mit bekannten Eigenschaften dieser Funktion steht.

Wir werden nun zeigen, daß *die Größenordnung* (17) *des Restgliedes* $S(r)$ im Falle einer meromorphen Funktion von endlicher Ordnung tatsächlich *die richtige ist*. Hierzu genügt es offenbar nach (18) zu beweisen, daß die Modulfunktion $\omega(x)$ der Bedingung

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} > 0 \tag{19}$$

genügt. Zu diesem Zweck bilden wir den Einheitskreis $|x| \leqq 1$ auf die obere Halbebene $I(s) \geqq 0$ der s-Ebene konform ab z. B. so, daß der Nullpunkt $x = 0$ in den Punkt $s = i$ übergeht; dies geschehe durch die lineare Transformation

$$s = s(x), \quad x = x(s), \quad (s(0) = i).$$

Die zusammengesetzte Funktion $\omega(x(s)) = \overline{\omega}(s)$ hat dann die Eigenschaft gegenüber den Substitutionen der Gruppe

$$\bar{s} = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}$$

invariant zu sein, wobei α, δ ungerade, β, γ gerade ganze Zahlen sind, derart, daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{20}$$

Bezeichnet ω_0 den Wert $\omega(0) = \overline{\omega}(i)$, so nimmt also die Funktion $\overline{\omega}(s)$ denselben Wert ω_0 in allen Punkten

$$\bar{s}_i = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i \frac{1}{\gamma^2 + \delta^2} \tag{21}$$

an.

Es seien nun γ ($\equiv 0 \bmod 2$) und δ ($\equiv 1 \bmod 2$) zwei beliebige teilerfremde Zahlen. Man sieht leicht ein, daß dann eine Zahl α ($\equiv 1 \bmod 2$) und eine Zahl β ($\equiv 0 \bmod 2$) existieren, welche die Gleichung (20) befriedigen und dazu den Bedingungen

$$|\alpha| < 2|\gamma|, \quad |\beta| < 2|\delta|$$

genügen, wenn $\gamma \neq 0$; für $\gamma = 0$ soll die erste Ungleichung durch $|\alpha| = 1$ ersetzt werden. Für dieses Zahlenpaar ist also

$$|R(\bar{s}_i)| = \frac{|\alpha\gamma + \beta\delta|}{\gamma^2 + \delta^2} \leqq \frac{|\alpha\gamma| + |\beta\delta|}{\gamma^2 + \delta^2} < 2.$$

Wir sehen demnach, daß jedem zulässigen Wertpaar γ, δ eine Substitution der Modulgruppe entspricht, für welche der Punkt (21) in den Streifen $|R(s)| < 2$ fällt.

Sei nach diesen Vorbereitungen t eine Zahl des Intervalles $0 < t < 1$; wir wollen die Anzahl $\nu(t)$ der in dem Rechteck

$$(22) \qquad |R(s)| \leqq 2, \quad t \leqq I(s) < 1$$

liegenden Punkte $\bar{s}_i$ abschätzen. Gemäß den obigen Bemerkungen ist $\nu(t)$ nicht kleiner als die Anzahl $\mu(t)$ der zulässigen Zahlpaare γ, δ, für welche

$$\gamma^2 + \delta^2 < \frac{1}{t}.$$

Es sei $\gamma = 2k$ eine positive ganze Zahl $< \frac{1}{\sqrt{2t}}$, und $\varphi(\gamma)$ die Anzahl der zu γ relativ primen Zahlen, die $< \gamma$ sind; die Anzahl $\mu(t)$ ist dann offenbar größer als die Summe

$$\sum_{\gamma < \frac{1}{\sqrt{2t}}} \varphi(\gamma).$$

Nun ist aber $\varphi(\gamma) = \varphi(2k) \geqq \varphi(k)$, und es wird demnach

$$\mu(t) > \sum_{k < \frac{1}{2\sqrt{2t}}} \varphi(k).$$

Für den zahlentheoretischen Mittelwert $\sum\limits_{k<u} \varphi(k) = \Phi(u)$ gilt bekanntlich die asymptotische Formel: $\Phi(u) \sim \frac{3}{\pi^2} u^2$, und man findet also:

$$\mu(t) > (1-\varepsilon)\frac{3}{8\pi^2 t},$$

wo $\varepsilon \to 0$ für $t \to 0$. Es existiert also eine *positive* Zahl c derart, daß die Anzahl $\nu(t)$ der in (22) liegenden Punkte $\bar{s}_i$ der Ungleichung

$$\nu(t) > \frac{c}{t} \tag{23}$$

für alle hinreichend kleinen Werte t genügt.

Diese letzte Ungleichung wenden wir nun an, um die Anzahl $n(r;\, \omega_0)$ der in den Kreis $|x| < r (< 1)$ fallenden Bildpunkte der Punkte $s = \bar{s}_i$ abzuschätzen. Eine leichte Rechnung zeigt, daß der Bildkreis C_r des Kreises $|x| = r$ durch die Eckpunkte $\pm 2 + it$ des Rechtecks (22) geht, wenn t und r durch die Gleichung

$$(1-r^2)t = 1+r^2-2\sqrt{1-(1-r^2)(2-r^2)}$$

verbunden werden, woraus

$$t = \tfrac{5}{2}(1-r)(1+\varepsilon(r)) \tag{24}$$

folgt; $\varepsilon(r)$ ist hier eine mit $1-r$ verschwindende Größe. Nun ist das Gebiet (22) ein Teilgebiet des Kreises C_r, und daher

$$n(r;\, \omega_0) \geqq \nu(t);$$

gemäß (23) und (24) existiert also, wenn $0 < r_0 < 1$, eine von r unabhängige positive Zahl d derart, daß

$$n(r;\, \omega_0) > \frac{d}{1-r} \text{ für } r_0 \leqq r < 1.$$

Für die Größe $N(r;\, \omega_0)$ ergibt sich hieraus

$$N(r;\, \omega_0) \geqq \int_{r_0}^{r} \frac{n(t;\, \omega_0)}{t}\, dt > \int_{r_0}^{r} n(t;\, \omega_0)\, dt = d\left(\log\frac{1}{1-r} - \log\frac{1}{1-r_0}\right),$$

und es ist also

$$\varliminf_{r=1} \frac{N(r;\, \omega_0)}{\log\dfrac{1}{1-r}} > 0.$$

Nach dem ersten Hauptsatze ist aber $T(r, \omega) > N(r;\, \omega_0) + O(1)$, und wir finden schließlich, daß

$$\varliminf_{r=1} \frac{T(r, \omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}} > 0,$$

eine Ungleichung, die sogar etwas schärfer als die zu beweisende (19) ist.

Durch eine ähnliche Überlegung, wie die eben durchgeführte, kann man schließen, daß die Modulfunktion der Ungleichung

$$\varlimsup_{r=1} \frac{N(r;z)}{\log \frac{1}{1-r}} > 0$$

nicht nur für $z = \omega_0$, sondern für jeden von 0, 1 und ∞ verschiedenen Wert z genügt. Mittels des Hilfssatzes 2 S. 82 geht hieraus hervor, daß die Reihe

$$\sum (1 - r_\nu(z))$$

für alle Werte z außer den *drei:* $z = 0, 1, \infty$ divergent ist. Wir sehen also, daß die in dem Satz 1 auf S. 85 gemachte Voraussetzung, daß nämlich die Zahl $\lambda > 0$ ist, *wesentlich* ist; der Satz gilt nicht mehr für $\lambda = 0$.

Es sei zum Schluß auf eine spezielle Folgerung aus der Hauptungleichung (II) aufmerksam gemacht. Wir betrachten eine Funktion $f(x)$, die innerhalb des Einheitskreises *drei* Werte z. B. 0, 1 und ∞ ausläßt. Aus dem zweiten Hauptsatze folgt dann, daß die Fundamentalgröße $T(r)$, die sich im vorliegenden Falle auf den Mittelwert

$$T(r) = m(r;\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi$$

reduziert, die obere Schranke

$$T(r) < \text{const.} \log \frac{1}{1-r} \quad \text{für} \quad 0 < r_0 \leqq r < 1 \tag{25}$$

hat, eine Abschätzung, die, wie wir soeben gesehen haben, *sich nicht verbessern läßt.* Aus der Ungleichung (1) S. 81 schließen wir weiter, indem wir $2\varrho = 1 + r$ setzen, daß der Maximalmodul $M(r)$ der Funktion der Ungleichung

$$\log M(r) < \text{const.} \frac{1}{1-r} \log \frac{1}{1-r}$$

genügen muß. Der Umstand, daß die Beziehung (25) scharf ist, könnte die Vermutung nahe legen, daß auch die letzte Abschätzung die bestmögliche sei; tatsächlich ist dies aber nicht der Fall, denn es ist unter den obigen Voraussetzungen, wie Landau [21] gezeigt hat,

$$\log M(r) < \text{const.} \frac{1}{1-r},$$

wo die rechtsstehende Schranke wieder von der Modulfunktion erreicht wird.

Anhang.

1. Nachdem ich die vorliegende Arbeit im Manuskript fertig hatte, erhielt ich von Herrn LITTLEWOOD eine briefliche Mitteilung, wo er eine interessante Verallgemeinerung der in meiner Arbeit *„Untersuchungen über den Picardschen Satz"* entwickelten Methode angibt[1]. Diese verallgemeinerte Methode ist auch im Falle einer *meromorphen* Funktion anwendbar; ich werde im folgenden mit Herrn LITTLEWOODS gütiger Erlaubnis von ihr Gebrauch machen, um die Sätze, welche im dritten Abschnitt der vorliegenden Arbeit gegeben sind, zu erweitern.

Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion und $\psi(x)$ das Produkt

$$\psi = (f-a_1)(f-a_2)\dots(f-a_{q-1}),$$

wo die Zahlen $a_\nu\,(\nu = 1, \dots, q-1)$ *endliche, untereinander verschiedene* komplexe Zahlen bezeichnen. Man beweist leicht, daß

$$(1)\qquad (q-1)\,T(r,f) < T(r,\psi) + O(1).$$

In der Tat ist zunächst

$$(1')\qquad (q-1)\,N(r,f) = N(r,\psi).$$

Um die Größe $m(r,f)$ abzuschätzen, bemerke man, daß

$$|f|^{q-1} = \frac{|\psi|}{\left|1-\frac{a_1}{f}\right|\cdots\left|1-\frac{a_{q-1}}{f}\right|},$$

und also für $|f| \geqq 2a$, wo a die größte der Zahlen $|a_1|, \dots, |a_{q-1}|$ ist,

$$|f|^{q-1} \leqq 2^{q-1}|\psi|, \quad (q-1)\overset{+}{\log}|f| \leqq (q-1)\log 2 + \overset{+}{\log}|\psi|.$$

Es wird demnach

$$(1'')\qquad (q-1)\,m(r,f)$$

$$= (q-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi = \frac{q-1}{2\pi}\int\limits_{|f|<2a}\overset{+}{\log}|f|\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|f|\geqq 2a}(q-1)\overset{+}{\log}|f|\,d\varphi$$

$$\leqq (q-1)\overset{+}{\log}2a + (q-1)\log 2 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|f|\geqq 2a}\overset{+}{\log}|\psi|\,d\varphi < m(r,\psi) + O(1).$$

---

[1] Während der Drucklegung dieser Abhandlung hat Herr COLLINGWOOD [22] eine Note veröffentlicht, wo er dieselbe Erweiterung angibt.

Die Behauptung (1) folgt nun durch Addition von (1′) und (1″).

Nach dem ersten Hauptsatze ist weiter

$$(2)\quad T(r,\psi) = m\left(r,\frac{1}{\psi}\right) + N\left(r,\frac{1}{\psi}\right) + O(1) = m\left(r,\frac{1}{\psi}\right) + \sum_{\nu=1}^{q-1} N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right) + O(1).$$

Hier ist nach der Ungleichung (4) S. 53

$$(3)\qquad m\left(r,\frac{1}{\psi}\right) = m\left(r,\frac{f'}{\psi}\cdot\frac{1}{f'}\right) \leqq m\left(r,\frac{f'}{\psi}\right) + m\left(r,\frac{1}{f'}\right),$$

und ferner nach dem ersten Hauptsatze:

$$(4)\quad m\left(r,\frac{1}{f'}\right) + O(1) = m(r,f') + N(r,f') - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) = m\left(r,f\cdot\frac{f'}{f}\right) + N(r,f') - N\left(r,\frac{1}{f'}\right)$$

$$\leqq m(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + N(r,f') - N\left(r,\frac{1}{f'}\right)$$

$$= T(r,f) - N(r,f) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + N(r,f') - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + O(1).$$

Gemäß (1) bis (4) ist also

$$(q-2)\,T(r,f) < \sum_{\nu=1}^{q-1} N\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right) + N(r,f') - N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + m\left(r,\frac{f'}{\psi}\right) + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + O(1).$$

Zur Abschätzung des Gliedes $m\left(r,\frac{f'}{\psi}\right)$ schreibe man $\frac{1}{\psi}$ in der Form

$$\frac{1}{\psi} = \sum_{\nu=1}^{q-1} \frac{c_\nu}{f-a_\nu},$$

wo c_ν die endliche, von Null verschiedene Zahl $c_\nu = \left[\frac{df}{d\psi}\right]_{f=a_\nu}$ bezeichnet. Unter Anwendung der Ungleichungen (4) S. 53 folgt dann, daß

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'}{\psi}\right| \leqq \overset{+}{\log}\left(\sum |c_\nu| \left|\frac{f'}{f-a_\nu}\right|\right) \leqq \sum \overset{+}{\log}\left|\frac{f'}{f-a_\nu}\right| + \sum \overset{+}{\log}|c_\nu| + \overset{+}{\log}(q-1),$$

oder also

$$m\left(r,\frac{f'}{\psi}\right) < \sum_{\nu=1}^{q-1} m\left(r,\frac{f'}{f-a_\nu}\right) + O(1).$$

Zusammenfassend gilt also das Resultat:

Wenn $f(x)$ eine meromorphe Funktion ist, und $a_1, \ldots, a_{q-1}$ endliche, voneinander verschiedene komplexe Zahlen bezeichnen, so ist

$$(q-2)\,T(r) < \sum_{\nu=1}^{q-1} N\left(r, \frac{1}{f-a_\nu}\right) + N(r, f') - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r), \tag{5}$$

wo das Glied $S(r)$ gleich

$$S(r) = \sum_{\nu=0}^{q-1} m\left(r, \frac{f'}{f-a_\nu}\right) + O(1) \qquad (a_0 = 0)$$

ist.

Beachtet man ferner, daß $T(r, f-a_\nu) = T(r, f) + O(1)$, so folgt unter Anwendung des Satzes S. 51 über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion, *daß $S(r)$ den in dem Satze S. 59 angegebenen Bedingungen genügt.*

Es seien nun $z_1, z_2, \ldots, z_q$ beliebige, endliche, verschiedene Zahlen. Man kann wieder der Ungleichung (5) dadurch eine allgemeinere Form geben, daß man sie auf die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - z_q}$$

anwendet, indem man $a_\nu = \dfrac{1}{z_\nu - z_q}$ $(\nu = 1, \ldots, q-1)$ setzt. Es wird

$$N\left(r, \frac{1}{\varphi - a_\nu}\right) = N\left(r, \frac{1}{f - z_\nu}\right), \quad N(r, \varphi) = N\left(r, \frac{1}{f - z_q}\right),$$

und, da

$$\varphi' = -\frac{f'}{(f - z_q)^2},$$

(vgl. S. 61):

$$N(r, \varphi') - N\left(r, \frac{1}{\varphi'}\right) = 2N\left(r, \frac{1}{f - z_q}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - 2N(r, f) + N(r, f').$$

Schließlich ist nach dem ersten Hauptsatze

$$T(r, \varphi) = T(r, f) + O(1),$$

und man erhält aus (5):

$$(q-2)\,T(r, f) < \sum_{\nu=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f - z_\nu}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - \left(2N(r, f) - N(r, f')\right) + S(r), \tag{6}$$

wo $S(r)$ wieder den oben angegebenen Bedingungen genügt.

In der Ungleichung (6) kann man nachträglich einer der Zahlen z_ν auch den Wert ∞ geben; setzt man nämlich z. B. $z_q = \infty$, so soll $N\left(r, \frac{1}{f-z_q}\right)$ durch $N(r, f)$ ersetzt werden, und die Beziehung (6) geht in die früher bewiesene (5) über (wobei $z_\nu = a_\nu (\nu = 1, \ldots, q-1)$). Wir erhalten also als Ergebnis folgende

Erweiterung des zweiten Hauptsatzes: *Es sei $f(x)$ eine in der endlichen Ebene meromorphe Funktion. Bezeichnen $z_1, z_2, \ldots, z_q$ untereinander verschiedene, endliche oder unendliche Zahlen, so ist*

$$(\mathrm{III}) \qquad (q-2)\, T(r) < \sum_{\nu=1}^{q} N(r; z_\nu) - N_1(r) + S(r),$$

wo $N_1(r)$ in derselben Weise, wie in dem zweiten Hauptsatz (S. 63), mittels der mehrfachen Stellen von $f(x)$ gebildet wird, und das Restglied $S(r)$ ebenfalls den in diesem Satze angegebenen Bedingungen genügt.

In der Ungleichung (III) ist die speziellere

$$(\mathrm{III}') \qquad (q-2)\, T(r) < \sum_{\nu=1}^{q} \bar{N}(r, z_\nu) + S(r)$$

enthalten, wo die Bezeichnung $\bar{N}$ die auf S. 63 angegebene Bedeutung hat.

2. Das soeben ausgesprochene Ergebnis, das den zweiten Hauptsatz als besonderen Fall ($q = 3$) enthält, führt zu einigen interessanten Erweiterungen der im dritten Abschnitt gegebenen Sätze. Wir machen insbesondere auf nachstehende Verallgemeinerung des Satzes auf S. 68 aufmerksam:

Satz 1. — *Wenn $z_1, \ldots, z_q$ voneinander verschiedene Zahlen sind, so ist*

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{N(r; z_1) + N(r; z_2) + \cdots + N(r; z_q)}{T(r)} \geqq q-2.$$

Eine meromorphe Funktion $f(x)$ genügt also der Ungleichung

$$(7) \qquad 1 - \frac{2}{q} \leqq \varlimsup_{r=\infty} \frac{N(r; z)}{T(r)} (\leqq 1)$$

für jedes z, höchstens $q-1$ Werte ausgenommen.

Wenn $f(x)$ insbesondere eine ganze Funktion ist, oder, allgemeiner, der Bedingung

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r; z)}{T(r)} = 0$$

für einen Wert $z = z_0$ genügt, so ist, falls $z_\nu \neq z_0$ $(\nu = 1, \ldots, q)$,

$$\underline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r; z_1) + \cdots + N(r; z_q)}{T(r)} \geqq q - 1.$$

Eine solche Funktion besitzt also die Eigenschaft

$$1 - \frac{1}{q} \leqq \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r; z)}{T(r)} \; (\leqq 1) \tag{7'}$$

für jedes $z \neq z_0$, außer möglicherweise $q-1$ Ausnahmewerten.

Im Falle einer Funktion von unendlicher Ordnung sollen hierbei die oftgenannten Ausnahmeintervalle von endlichem Gesamtmaß zuerst ausgeschlossen werden. Durch Beispiele kann man wieder zeigen, daß die in diesem Satze erhaltenen Grenzen sich nicht verbessern lassen. So existieren z. B. meromorphe Funktionen, bei denen die Gleichung

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r; z)}{T(r)} = 1 - \frac{2}{q} \tag{8}$$

für q verschiedene Zahlen z besteht; eine solche Funktion ist

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

wo

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{2q}{q-2} x^{q-1}}}{(\cos(i x^{q-1}))^2}, \quad (q \geqq 3).$$

Eine ähnliche Rechnung wie die auf S. 70—74 durchgeführte zeigt, daß für $F(x)$:

$$m(r; \infty) \sim \frac{4}{q-2} \cdot \frac{r^{q-1}}{\pi}, \quad N(r; \infty) \sim \frac{2 r^{q-1}}{\pi},$$

und also

$$T(r) \sim \frac{2q}{q-2} \cdot \frac{r^{q-1}}{\pi}.$$

Ferner ist für jeden der Werte

$$z_\nu = e^{\frac{2\pi \nu i}{q-1}} \int_0^\infty \frac{4 e^{-\frac{2q}{q-2} t^{q-1}}}{\left(e^{t^{q-1}} + e^{-t^{q-1}}\right)^2} dt \quad (\nu = 1, 2, \ldots, q-1):$$

$$N(r; z_\nu) \sim \frac{2 r^{q-1}}{\pi}.$$

Die Gleichung (8) gilt also für die q verschiedenen Werte $z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$ und ∞.

Daß auch die in (7') gegebene, für ganze Funktionen gültige untere Schranke sich nicht erhöhen läßt, geht aus dem Beispiel

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^q} dt$$

hervor. Diese Funktion genügt nämlich der Bedingung

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;\, z)}{T(r)} = 1 - \frac{1}{q}$$

für die q verschiedenen, endlichen asymptotischen Werte

$$z_\nu = e^{\frac{2\pi\nu i}{q}} \int_0^\infty e^{-t^q} dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q).$$

Wir wollen zum Schluß auf eine weitere einfache Folgerung aus dem erweiterten zweiten Hauptsatze aufmerksam machen. Wenn k eine beliebige Zahl des Intervalles $\frac{1}{3} \leqq k < 1$ ist, so kann die Ungleichung

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;\, z)}{T(r)} < k$$

höchstens für eine *endliche* Anzahl $\left(\leqq \frac{1+k}{1-k}\right)$ von Werten z bestehen. Ist also $k_1 < k_2 < \cdots < k_\nu < k_{\nu+1} < \cdots$ eine beliebige Zahlenfolge derart, daß $k_\nu \to 1$ für $\nu \to \infty$, so ist a fortiori die Anzahl der Werte z, für welche

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;\, z)}{T(r)} \tag{9}$$

in das Intervall $(k_\nu, k_{\nu+1})$ fällt, endlich, und man schließt also:

Satz 2. — *Eine meromorphe Funktion genügt der Bedingung*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;\, z)}{T(r)} = 1,$$

außer möglicherweise für eine abzählbare Wertmenge z.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß die Ausnahmemenge (z), für welche die obere Grenze (9) kleiner als Eins ist, bei einer meromorphen Funktion von *endlicher* Ordnung nur aus einer *endlichen* Anzahl Werte z bestehen kann.

Nach Obigem ist es natürlich, eine Zahl z als einen *Ausnahmewert* einer gegebenen meromorphen Funktion zu bezeichnen, sobald

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)} < 1.$$

Die durch die Formel

$$\Theta(z) = \underline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r;z)}{T(r)} = 1 - \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r;z)}{T(r)}$$

definierte Zahl $\Theta(z) (0 \leqq \Theta(z) \leqq 1)$ nennen wir kurz das *Gewicht* des betreffenden Wertes z. Mit dieser Bezeichnung nimmt die Hauptungleichung (III) eine besonders elegante Form an. Dividiert man nämlich beide Seiten mit $T(r)$, so folgt, daß

$$\sum_1^q \Theta(z_\nu) \leqq 2.$$

Dieses Ergebnis besteht nun, wie groß die Anzahl q auch gewählt wird, und man findet demnach den

Satz 3. — *Es seien $f(x)$ eine meromorphe Funktion, $z_1, z_2, \ldots$ ihre Ausnahmewerte und Θ_ν das Gewicht des Wertes z_ν. Dann ist die Reihe*

$$\sum \Theta_\nu$$

konvergent und ihre Summe höchstens gleich 2.

Falls $f(x)$ insbesondere eine ganze Funktion ist, so ist der Wert $z = \infty$ ein Ausnahmewert vom Gewicht Eins, und man schließt:

Korollar. — *Die Summe der Gewichte der endlichen Ausnahmewerte einer ganzen Funktion ist höchstens gleich Eins.*

Wir haben in dieser Arbeit mehrere Beispiele meromorpher Funktionen gegeben, bei denen die Gewichtssummen der Ausnahmewerte die in diesen Sätzen gefundenen oberen Schranken (2 bzw. 1) erreichen.

Die Gültigkeit der oben erörterten Sätze erstreckt sich ohne weiteres auf analytische Funktionen, die innerhalb des Einheitskreises meromorph sind, sobald die Fundamentalgröße $T(r)$ der Bedingung

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty$$

genügt.

Literaturverzeichnis.

BLUMENTHAL, O.: [5] *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Paris, Gauthier-Villars, 1910).

BOREL, É.: [4] *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900).

[6] *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903).

COLLINGWOOD, E. F.: [22] *Sur quelques théorèmes de M. R. Nevanlinna* (Comptes rendus, t. 179, novembre 1924, p. 955).

DENJOY, A.: [10] *Sur les produits canoniques d'ordre infini* (Thèse, Paris 1910).

FATOU, P.: [17] *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (Acta mathematica, T. 30, 1906, p. 335—400).

HADAMARD, J.: [2] *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considerée par Riemann* (Journal de Mathématique, 4e série, IX, T. 1893, p. 171—215).

JENSEN, J. L. W. V.: [1] *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions* (Acta mathematica, T. 22, 1899, p. 359—364).

LANDAU, E. und BOHR, H.: [21] *Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Nähe der Geraden* $\sigma = 1$ (Gött. Nachrichten, 1910, S. 303—330).

LINDELÖF, E.: [8] *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (Acta Soc. Sc. Fennicae, T. 31, 1902).

[14] *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (Ann. Éc. Norm. (3), T. XXII, 1905, p. 369—395).

NEVANLINNA, F.: [9] *Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung* (Soc. Sc. Fenn., Comment. Phys.-Math. II 4, 1923).

NEVANLINNA, R.: [11] *Untersuchungen über den Picardschen Satz* (Acta Soc. Sc. Fennicae, T. 50, N:o 6, 1924).

[16] *Über eine Klasse meromorpher Funktionen* (Math. Annalen, Bd. 92, H. 3/4, 1924, S. 145—154).

OSTROWSKI, A.: [19] *Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie* (Acta litt. ac. scient. regiae univ. hung. Fransisco-Josephinae, T. 1, f. 2, 1923, S. 1—8).

PICARD, É.: [3] *Mémoire sur les fonctions entières* (Ann. Éc. Norm., 2e série, T. IX, 1880, p. 145—166).

RIESZ, F.: [20] *Über die Randwerte einer analytischen Funktion* (Math. Zeitschrift, Bd. 18, H. 1/2, 1923, S. 87—95).

RIESZ, F. u. M.: [18] *Über die Randwerte analytischer Funktionen* (Quatrième congrés des Math. Scand. à Stockholm 1916, p. 27—44).

VALIRON, G.: [7] *Sur les fonctions entières d'ordre fini* (Bulletin des sciences math., 2e série, T. XLV, septembre 1921).

[12] *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (Comptes rendus, t. 174, 1922, p. 1054).

[15] *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923).

WIMAN, A.: [13] *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières* (Arkiv f. mat., astr. och fys., T. I, 1903, p. 327—345).