



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Адам, В. А. Андреев, А. Исар, В. И. Манько,
М. А. Манько, Звездочное произведение, дискретные
функции Вигнера и томограммы спиновых систем,
ТМФ, 2016, том 186, номер 3, 401–422

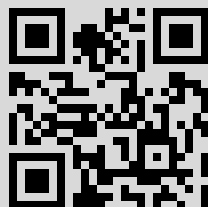
DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8970>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 106.51.226.7

21 августа 2022 г., 10:26:26



© 2016 г.

П. Адам*, В. А. Андреев†, А. Исар‡,
В. И. Манько†, М. А. Манько†

ЗВЕЗДОЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА И ТОМОГРАММЫ СПИНОВЫХ СИСТЕМ

Для спиновых состояний развит формализм звездочного произведения. Рассмотрены различные способы построения систем операторов, образующих наборы деквантайзеров и квантайзеров, и установлена связь между ними. Исследован физический смысл отвечающих им символов операторов. В качестве символов операторов могут также выступать квантовые томограммы. Показано, что возможность выразить дискретные функции Вигнера через измеряемые величины обусловлена тем, что эти функции можно связать с квантовыми томограммами. Исследован физический смысл томограмм и томографических символов спиновых систем, который они приобретают в рамках формализма звездочного произведения. Изучена структура ядер суммирования, с помощью которой можно выражать друг через друга символы операторов, вычисленных с помощью разных наборов деквантайзеров, а также возникающих при вычислении звездочного произведения символов операторов.

Ключевые слова: звездочное произведение, квантайзеры, деквантайзеры, дискретные функции Вигнера, ядро, фиделити, параметр чистоты.

DOI: 10.4213/tmf8970

Настоящая работа выполнена в рамках сотрудничества между РАН и The Romanian Academy по теме “Основные аспекты квантовой оптики и квантовых корреляций в теории обработки и передачи информации”, а также РАН и Hungarian Academy of Sciences по теме “Запутанные и суперпозиционные состояния, декогерентность в процессах взаимодействия излучения с веществом и томографический метод анализа сигналов”. В. А. Андреев, В. И. Манько и М. А. Манько благодарят The Hungarian Scientific Research Fund (ОТКА) (контракт № K83858) за поддержку. А. Исар благодарен за финансовую поддержку Ministry of Education and Scientific Research (Romania) (проект CNCS-UEFISCDI PN-II-ID-PCE-2011-3-0083).

*Institute for Solid State Physics and Optics, Wigner Research Centre for Physics of the H. A. S., Budapest, Hungary. E-mail: adam.peter@wigner.mta.hu

†Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: andrvlad@yandex.ru

‡Horia Hulubei National Institute of Physics and Nuclear Engineering, Magurele, Romania.
E-mail: isar@theory.nipne.ro

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что квантовая механика допускает различные формулировки, которые эквивалентны друг другу с математической точки зрения. Чаще всего формализм квантовой механики основан на использовании математического понятия гильбертова пространства, векторы в котором сопоставляются квантовым состояниям, а операторы, действующие в нем, – наблюдаемым величинам, причем это гильбертово пространство может быть как бесконечномерным, так и конечномерным. Такой математический формализм отличает квантовую механику от классической, также следует учитывать, что результат измерения в квантовой теории можно предсказать, как правило, только с некоторой вероятностью. По этой причине с самого начала предпринимались попытки описывать квантовые явления с помощью некоторой статистической теории, аналогичной классической статистической механике.

В классической статистической теории система характеризуется функцией $\rho(q, p)$, которая определена на фазовом пространстве и является плотностью вероятности того, что система находится в состоянии, характеризующемся параметрами (q, p) . С помощью плотности вероятности можно вычислить различные характеристики системы, например средние значения тех или иных величин.

В квантовой механике можно построить аналог $D(q, p)$ классической функции $\rho(q, p)$. При этом речь идет именно об аналоге, поскольку в силу принципа неопределенности квантовые состояния не могут одновременно обладать определенными значениями координаты и импульса, поэтому функцию $D(q, p)$ нельзя интерпретировать как плотность вероятности и ее называют квазивероятностным распределением. Квазивероятностное распределение определяет квантовое состояние, и по нему можно восстановить волновую функцию и матрицу плотности.

В классической статистической механике, для того чтобы найти среднее значение какой-либо функции $F(q, p)$, необходимо усреднить эту функцию по плотности вероятности $\rho(q, p)$ нахождения системы в состоянии (q, p) :

$$\langle F \rangle = \int F(q, p) \rho(q, p) dq dp. \quad (1)$$

В квантовой механике наблюдаемой величине $F(q, p)$ отвечает определенный оператор \hat{A} . Для того чтобы вычислить его среднее значение с помощью формулы, аналогичной (1), ему необходимо сопоставить некоторую функцию $A_f(q, p)$, определенную на фазовом пространстве, такую, что среднее значение $\langle \hat{A} \rangle$ оператора \hat{A} на состоянии, задаваемом квазивероятностным распределением $F(q, p)$, имеет вид

$$\langle \hat{A} \rangle = \int A_f(q, p) F(q, p) dq dp. \quad (2)$$

Функция $A_f(q, p)$ называется символом оператора \hat{A} , отвечающим квазивероятностному распределению $F(q, p)$. Существует целый ряд квазивероятностных распределений, соответственно и каждый оператор \hat{A} обладает несколькими символами. Наиболее известными и часто применяемыми среди них являются функции Вигнера $W(q, p)$ [1], Хусими–Кано $Q(q, p)$ [2], [3] и Глаубера–Сударшана $P(q, p)$ [4], [5]. Проблема представления квантовой механики в фазовом пространстве также обсуждается в работах Стратоновича [6]. Свойства квантовых функций распределения

для непрерывных систем изучены в обзорах [7]–[9] и книгах [10], [11]. В работе [12] развит операторный метод построения символов Хусими. Возможность применения этих функций в задачах квантовой оптики исследована в монографиях [13]–[15].

Помимо различных квазивероятностных распределений, в квантовой механике существует и настоящая плотность распределения вероятностей, полностью определяющая квантовое состояние. Ее называют симплектической томограммой квантового состояния [16]; свойства и значение данных томограмм обсуждаются в обзоре [17]. Для такой плотности вероятности также можно ввести символ оператора, который называется томографическим w -символом, или томограммой данного оператора. В работе [18] для непрерывных систем найдена связь между симплектическими томограммами и функцией Хусими, а также изучены трансформационные свойства функции Хусими.

В настоящей работе мы рассматриваем дискретные спиновые системы, для описания которых в работах [19]–[23] развит подход, основанный на использовании квазивероятностных распределений в конечномерном фазовом пространстве. Эти квазивероятностные распределения исследованы в работах [24]–[26]. Как и в случае непрерывных квантовых систем, дискретные спиновые системы можно описать с помощью настоящих распределений вероятностей, которые называются спиновыми томограммами [27]–[30], или унитарными матричными томограммами [31]. Возникает вопрос: как строить такие распределения и как с ними работать? С целью ответить на него в работах [6], [32], [33] развит подход, основанный на использовании конструкции звездочного произведения, использующий специальные операторы, называемые деквантайзерами $\hat{Q}(x)$ и квантайзерами $\hat{D}(x)$, и применимый как к непрерывным, так и дискретным системам. Эти операторы действуют в гильбертовом пространстве квантовых состояний и зависят от параметров, которые описывают эти состояния. С помощью деквантайзеров можно сопоставить операторам их символ, а с помощью квантайзеров восстановить операторы по их символам. В том случае, когда оператор является матрицей плотности квантового состояния, его символ играет роль функции Вигнера или томограммы этого состояния. Конструкция звездочного произведения позволяет также, используя язык символов операторов, определить их действие на квантовые состояния.

В работе [34] конструкция звездочного произведения использована при изучении калибровочных теорий с высшими спинами. В работах [35] изучен общий вид звездочного произведения на алгебре Грассмана, при этом общий вид звездочного коммутатора на алгебре Грассмана представлен как деформация обычных скобок Пуассона. Показано, что, кроме звездочного коммутатора Мойяла, с точностью до преобразования подобия на алгебре Грассмана существуют и другие деформации скобок Пуассона, не сводящиеся к звездочному коммутатору Мойяла преобразованием подобия. В работах [36], [37] изучена структура звездочного произведения на пространствах обобщенных функций и возможность его использования при построении некоммутативной теории поля.

Формализм звездочного произведения позволяет использовать вместо гильбертова пространства алгебру функций на фазовом пространстве с нелокальным правилом умножения, задаваемым интегральным ядром Грюневальда [38] или правилом Мойяла [39]. В работе [40] с помощью звездочного произведения установлена связь процедуры квантования с различными томографическими схемами. В настоящей

работе мы реализуем данную программу для спиновых состояний. Рассмотрены различные способы построения систем операторов, образующих наборы деквантайзеров и квантайзеров, и установлена связь между ними. Исследован физический смысл символов операторов, которые отвечают этим наборам деквантайзеров, при этом в качестве символов операторов могут выступать и квантовые томограммы. Показано, что возможность выразить дискретные функции Вигнера через измеряемые величины обусловлена тем, что данные функции можно связать с квантовыми томограммами. Исследован физический смысл томограмм спиновых систем, который они приобретают в рамках формализма звездочного произведения. Подробно разобран случай одночастичного спинового состояния и намечена схема обобщения построенного формализма на многочастичные спиновые состояния. Найдена связь между функциями Вигнера и томограммами спиновых состояний.

Другой подход к построению квазивероятностных распределений для спиновых систем предложен в работе [41]. Связь между квазивероятностными распределениями и квантовыми томограммами изучена в работе [42].

2. КВАНТАЙЗЕРЫ И ДЕКВАНТАЙЗЕРЫ

В настоящем разделе мы строим формализм, позволяющий использовать для описания квантовых процессов не операторы, а функции. В случае непрерывных переменных такой формализм реализуется с помощью квазивероятностных и томографических распределений, которые задают квантовые состояния, и символов операторов. Нашей целью является систематическое развитие данного подхода в случае дискретных переменных. Мы рассматриваем его на примере одночастичного спинового состояния, при этом, по возможности, следуем той схеме, которая используется в непрерывном случае.

Пусть \mathcal{H}_d – d -мерное гильбертово пространство, векторы в котором отвечают физическим состояниям квантовой системы, и пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ – множество линейных ограниченных операторов, действующих в \mathcal{H}_d . Тогда любой оператор $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ можно представить в виде матрицы размера $d \times d$ с комплексными матричными элементами. При этом эрмитовы матрицы можно сопоставить некоторым наблюдаемым величинам. Рассмотрим некоторый оператор $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ и некоторый набор эрмитовых положительно определенных операторов $\hat{U}(x)$, зависящих от параметра x , который может принимать как дискретные, так и непрерывные значения. Функция $f_A(x)$, определяемая формулой

$$f_A(x) = \text{Tr}(\hat{U}(x)\hat{A}), \quad (3)$$

называется символом оператора $\hat{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$, построенным с помощью набора операторов $\hat{U}(x)$. Операторы $\hat{U}(x)$ называются *деквантующими операторами*, или просто *деквантайзерами*.

В случае дискретных систем наборы операторов $\hat{U}(x)$ являются аналогами квазивероятностных распределений, которые используются для изучения непрерывных систем, таких как функции Вигнера и функции Хусими. По этой причине операторы $\hat{U}(x)$ тоже часто называют дискретными функциями Вигнера. Для непрерывных систем операторы $\hat{U}(x)$ определены на обычном фазовом пространстве с координатами (q, p) , а для дискретных систем (x) обозначает набор как дискретных, так

и непрерывных параметров, которые определяют оператор $\widehat{U}(x)$. Этот набор параметров по аналогии с непрерывным случаем мы также будем называть фазовым пространством.

Поясним физический смысл деквантайзеров. Рассмотрим сначала пример. Пусть оператор $\hat{A} = \hat{\rho}$ – оператор плотности квантовой системы с дискретными переменными, например спиновой системы. В качестве деквантайзеров выберем одномерные проекторы $\hat{P}_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$. При этом мы допускаем, что векторы $|\psi_k\rangle$ могут, вообще говоря, и не быть ортогональными друг другу. Тогда k -я компонента символа оператора $\hat{\rho}$, построенного с помощью набора деквантайзеров P_k , $k = 1, \dots, N$, имеет вид

$$f_\rho^P(k) = \text{Tr}(\hat{P}_k \hat{\rho}) = \langle\psi_k|\hat{\rho}|\psi_k\rangle, \tag{4}$$

где $f_\rho^P(k)$ – вероятность обнаружить систему в чистом состоянии $|\psi_k\rangle$, на которое ее проецирует оператор \hat{P}_k . Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^N \hat{P}_k = \hat{I}. \tag{5}$$

Деквантайзеры \hat{P}_k являются эрмитовыми положительно определенными операторами. Именно их положительная определенность и обеспечивает тот факт, что символ $f_\rho^P(k) = \text{Tr}(\hat{P}_k \hat{\rho}) \geq 0$ есть неотрицательная функция и ее можно интерпретировать как вероятность k -го исхода измерения. В общем случае требуется только, чтобы деквантайзеры $\widehat{U}(k)$ были эрмитовыми операторами. Поэтому символы $f_\rho(k) = \text{Tr}(\widehat{U}(k)\hat{\rho})$ могут принимать отрицательные значения и не могут быть интерпретированы как вероятности исходов измерений тех или иных наблюдаемых величин.

Для заданной системы деквантайзеров $\widehat{U}(k)$, $k = 1, \dots, N$, формула (3) определяет отображение пространства операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ в пространство функций

$$\mathcal{F} = \{f(k) : \{k = 1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Это отображение линейно, т. е. имеют место соотношения

$$\widehat{C} = \hat{A} + \hat{B} \iff f_C(k) = f_A(k) + f_B(k), \quad \widehat{C} = c\hat{A} \iff f_C(k) = cf_A(k)$$

для любого $c \in \mathbb{C}$. Если отображение (3) оператора \hat{A} на функцию $f_A(k)$ является взаимно однозначным, функция $f_A(k)$ называется символом оператора \hat{A} . Для такого отображения символ $f_A(k)$ содержит полную информацию об операторе \hat{A} и его можно восстановить по формуле

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^N f_A(k)\widehat{D}(k). \tag{6}$$

Операторы $\widehat{D}(k) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ называются *квантайзерами*, они связаны с деквантайзерами соотношением

$$\text{Tr}(\widehat{U}(x)\hat{A}) = \int \text{Tr}\widehat{U}(x')\hat{A} \text{Tr}(\widehat{U}(x)\widehat{D}(x')) dx'. \tag{7}$$

Поскольку параметр x может принимать как дискретные, так и непрерывные значения, выражение (7) может подразумевать процедуру как интегрирования, так и суммирования.

Выражение (7) справедливо для всех наборов квантаizers и деквантаizers. В ряде случаев оно упрощается и принимает вид

$$\text{Tr}(\widehat{U}(k)\widehat{D}(k')) = \delta(k, k'). \quad (8)$$

Для того чтобы обратное отображение (6) существовало, необходимо и достаточно, чтобы набор деквантаizers $\widehat{U}(k) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ содержал d^2 линейно независимых линейных операторов. Очевидно, что для этого должно выполняться условие $N \geq d^2$. Если мы имеем d -мерную квантовую систему, то ей отвечает d проекторов \widehat{P}_k , $k = 1, \dots, d$. При $d > 1$ набора деквантаizers недостаточно для того, чтобы восстановить оператор по его символу, поэтому приходится использовать переполненные наборы проекторов и отвечающих им символов, иногда даже используют непрерывный набор проекторов. Далее в работе мы рассматриваем такой пример.

3. СТРУКТУРА ЯДЕР СУММИРОВАНИЯ

Формализм звездочного произведения включает в себя различные операции над символами операторов, томограммами и функциями Вигнера квантовых состояний. Данные величины являются функциями, заданными на фазовом пространстве, и большинство операций над ними осуществляется путем вычисления интеграла от произведений этих функций на то или иное ядро интегрирования. Ядра интегрирования суть функции от нескольких точек в фазовом пространстве, и осуществляемые с их помощью операции являются нелокальными. В дискретном случае вместо интегрирования проводится суммирование, поэтому соответствующее ядро мы будем называть ядром суммирования. Иногда, в зависимости от выбора набора деквантаizers и квантаizers, по части переменных может проводиться суммирование, а по части – интегрирование. Вид соответствующих ядер определяется той операцией, которую мы хотим осуществить. Все ядра имеют вид следа произведения некоторого количества квантаizers и деквантаizers. Собственно говоря, они и являются тем техническим элементом, с помощью которого осуществляются операции в формализме звездочного произведения, и реализация той или иной операции начинается с вычисления соответствующего ядра.

В настоящей работе мы имеем дело с тремя типами ядер. С помощью ядер первого типа можно выразить друг через друга символы операторов, вычисленные с помощью разных наборов деквантаizers. Данные ядра являются функциями от двух точек в пространстве параметров, задающих наборы деквантаizers и квантаizers. Рассмотрим их структуру, учитывая, что наборы деквантаizers и квантаizers можно задать не единственным образом. Пусть имеются два набора $\{U^1(i), D^1(i), i = 1, \dots, N\}$, $\{U^2(j), D^2(j), j = 1, \dots, M\}$ и некоторый оператор \hat{A} . С помощью каждого набора можно построить символы $f_A^1(i)$, $i = 1, \dots, N$, и $f_A^2(j)$, $j = 1, \dots, M$, оператора \hat{A} , которые связаны соотношениями

$$f_A^1(i) = \sum_{k=1}^M K^{(1,2)}(i, k) f_A^2(k), \quad f_A^2(j) = \sum_{l=1}^N \tilde{K}^{(2,1)}(j, l) f_A^1(l). \quad (9)$$

Ядра $K^{(1,2)}(i, k)$, $\tilde{K}^{(2,1)}(j, l)$ имеют вид

$$K^{(1,2)}(i, k) = \text{Tr}(\hat{U}^1(i)\hat{D}^2(k)), \quad \tilde{K}^{(2,1)}(j, l) = \text{Tr}(\hat{U}^2(j)\hat{D}^1(l)). \quad (10)$$

Ядро $K^{(1,2)}(i, k)$, входящее в выражения (10), является следом произведения квантайзера, принадлежащего одному набору, и деквантайзера, принадлежащего другому набору.

Другой тип ядер, которые также являются функциями от двух точек в пространстве параметров, возникает при вычислении фиделити и параметра чистоты. Величина \mathcal{F} , задающая вероятность перехода между двумя квантовыми состояниями и называемая *фиделити*, определяется как след произведения матриц плотности данных состояний:

$$\mathcal{F}(\rho_1\rho_2) = \text{Tr}(\rho_1\rho_2). \quad (11)$$

Подставляя в формулу (11) соотношение (6) для матриц плотности, выраженных через их символы, получим значение величины их фиделити:

$$\mathcal{F}(\rho_1\rho_2) = \sum_{k=1}^N \sum_{k=l}^N f_{\rho_1}(k)f_{\rho_2}(l) \text{Tr}(\hat{D}(k)\hat{D}(l)) = \sum_{k=1}^N \sum_{k=l}^N f_{\rho_1}(k)f_{\rho_2}(l)K(k, l). \quad (12)$$

Параметр чистоты μ определяется как след квадрата матрицы плотности квантового состояния. Для него получаем выражение

$$\mu = \text{Tr}(\rho^2) = \sum_{k=1}^N \sum_{k=l}^N f_{\rho}(k)f_{\rho}(l) \text{Tr}(\hat{D}(k)\hat{D}(l)) = \sum_{k=1}^N \sum_{k=l}^N f_{\rho}(k)f_{\rho}(l)K(k, l). \quad (13)$$

В данном случае ядро $K(k, l)$, входящее в выражения (12), (13), является следом произведения двух квантайзеров, принадлежащих одному и тому же набору.

Ядра третьего типа возникают при вычислении звездочного произведения символов операторов. В случае непрерывных систем произведение функций Вигнера задается с помощью ядра Грюневальда [38]. Для дискретных систем можно построить аналогичные ядра, которые являются функциями от трех точек в пространстве параметров, задающих наборы деквантайзеров и квантайзеров. Опишем их структуру. Если f_A, f_B – символы, отвечающие операторам \hat{A} и \hat{B} , их звездочное произведение имеет вид

$$(f_A * f_B)(x) = f_{AB}(x), \quad (14)$$

где символ f_{AB} отвечает произведению операторов $\hat{A}\hat{B}$. Это произведение ассоциативно и определено формулой

$$(f_A * f_B)(x) = \int f_A(x')f_B(x'')K(x', x'', x) dx' dx'', \quad (15)$$

где ядро $K(x', x'', x)$ имеет вид

$$K(x', x'', x) = \text{Tr}(\hat{D}(x')\hat{D}(x'')\hat{U}(x)). \quad (16)$$

В дискретном случае выражение (15) принимает вид

$$(f_A * f_B)(k) = \sum_{m,n} f_A(m)f_B(n)K(m, n, k), \quad (17)$$

$$K(m, n, k) = \text{Tr}(\hat{D}(m)\hat{D}(n)\hat{U}(k)).$$

Следует иметь в виду, что и в случае спиновых операторов пространство параметров, задающих наборы деквантайзеров и квантайзеров, может содержать и дискретные, и непрерывные параметры и, соответственно, выражение (15) подразумевает суммирование по дискретным параметрам и интегрирование по непрерывным параметрам.

В формализме звездочного произведения имеются и более сложные ядра. Так, например, при вычислении символа матрицы плотности состояния, которое получено в результате действия некоторого оператора на другое состояние, используется ядро, зависящее от четырех точек фазового пространства:

$$K(m, n, k, l) = \text{Tr}(\widehat{D}(m)\widehat{D}(n)\widehat{D}(k)\widehat{U}(l)). \quad (18)$$

Поэтому вычисление результата действия оператора на состояние сводится к вычислению звездочного произведения символов трех операторов, для чего используется ядро (18). В общем случае для вычисления звездочного произведения символов n операторов используется ядро, которое является функцией от $n + 1$ точек фазового пространства и имеет вид следа произведения n квантайзеров и одного деквантайзера. В нашем случае эти функции инвариантны по отношению к циклическим перестановкам своих аргументов. Этим свойством мы далее воспользуемся при вычислении явного вида компонент ядер.

Мы видим, что основными техническими объектами, с помощью которых осуществляются операции с символами операторов и функциями Вигнера, являются различные ядра, имеющие вид следа произведения некоторого числа квантайзеров на деквантайзер. С их помощью можно вычислять звездочное произведение символов, средние значения наблюдаемых величин, действие операторов на квантовые состояния. В настоящей работе в случае одночастичных спиновых состояний найден явный вид ядер $K^{(1,2)}(i, k)$, $K(k, l)$, $K(m, n, k)$ и показано, как с их помощью можно вычислять различные физические величины. Другие, более сложные ядра в работе не рассматриваются.

4. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА ОДНОЧАСТИЧНОГО СПИНОВОГО СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим одночастичное спиновое состояние и два типа наборов деквантайзеров и квантайзеров, которые ему отвечают. Набор первого типа содержит конечное число деквантайзеров и квантайзеров, набор второго типа состоит из бесконечного числа операторов. Матрица плотности одночастичного спинового состояния имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z & x + iy \\ x - iy & 1 - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ce^{i\xi} \\ ce^{-i\xi} & b \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad a + b = 1. \quad (19)$$

Здесь величины x , y , z имеют смысл средних значений проекций спина на оси \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} , соответственно. Поскольку в данном случае размерность $d = 2$, минимальный набор деквантайзеров содержит четыре оператора. В качестве такого набора можно

использовать операторы $\mathcal{A} = \{\hat{\mathcal{A}}_{(j,k)}, j, k = 1, 2\}$, которые имеют вид [22]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_{0,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i-1}{2} \\ -\frac{i+1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_{1,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i+1}{2} \\ \frac{i-1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

Легко видеть, что для операторов (20) выполняются соотношения

$$\text{Tr}(\hat{A}_{(i,l)}\hat{A}_{(j,m)}) = \delta(i, j)\delta(l, m), \quad \sum_{k,l=0,1} \hat{A}_{(k,l)} = \hat{I} \sqrt{2}. \tag{21}$$

Наряду с набором деквантаizers \mathcal{A} (20) существует и другой набор деквантаizers $\mathcal{B} = \{\hat{\mathcal{B}}_{(j,k)}, j, k = 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{0,0} = \mathcal{A}_{0,0}^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{B}_{0,1} = \mathcal{A}_{0,1}^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i+1}{2} \\ \frac{i-1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}_{1,0} = \mathcal{A}_{1,0}^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{B}_{1,1} = \mathcal{A}_{1,1}^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i-1}{2} \\ -\frac{i+1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22}$$

Набор деквантаizers (22) построен в работе [43], для него также выполняются соотношения (21):

$$\text{Tr}(\hat{\mathcal{B}}_{(i,l)}\hat{\mathcal{B}}_{(j,m)}) = \delta(i, j)\delta(l, m), \quad \sum_{k,l=0,1} \hat{\mathcal{B}}_{(k,l)} = \hat{I} \sqrt{2}. \tag{23}$$

Процедуру построения деквантаizers (20), (22) можно развить, основываясь на подходе, использующем операторы проецирования, но в настоящей работе мы не будем на этом останавливаться.

Квазивероятностные распределения, отвечающие деквантаizerам (20) и (22), следуя установившейся традиции, будем называть дискретными функциями Вигнера. Для одночастичного спинового состояния (19) для набора \mathcal{A} они имеют вид

$$\begin{aligned} W^A(j, k) &= \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\mathcal{A}}_{j,k}), \quad j, k = 0, 1, \\ W^A(0, 0) &= \frac{1+z+x-y}{2\sqrt{2}}, & W^A(0, 1) &= \frac{1+z-x+y}{2\sqrt{2}}, \\ W^A(1, 0) &= \frac{1-z+x+y}{2\sqrt{2}}, & W^A(1, 1) &= \frac{1-z-x-y}{2\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{24}$$

а для набора \mathcal{B} – вид

$$\begin{aligned} W^B(j, k) &= \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\mathcal{B}}_{j,k}), \quad j, k = 0, 1, \\ W^B(0, 0) &= \frac{1+z+x+y}{2\sqrt{2}}, \quad W^B(0, 1) = \frac{1+z-x-y}{2\sqrt{2}}, \\ W^B(1, 0) &= \frac{1-z+x-y}{2\sqrt{2}}, \quad W^B(1, 1) = \frac{1-z-x+y}{2\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим, что функции Вигнера квантового состояния являются одновременно и символами его матрицы плотности.

Компоненты (24), (25) функции Вигнера имеют простой физический смысл. Чтобы понять его, заметим, что величины (x, y, z) , которые входят в компоненты матрицы плотности (19), суть средние значения проекций спина состояния (19) на оси $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$, соответственно. Таким образом, компоненты функции Вигнера суть линейные комбинации этих средних значений. Ниже мы свяжем эти компоненты с квантовыми томограммами, которые являются вероятностями проекций спина на определенную ось.

Деквантайзерам \mathcal{U}^A (20) соответствуют квантайзеры \mathcal{D}^A следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0,0}^A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_{0,1}^A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i-1}{2} \\ -\frac{i+1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}_{1,0}^A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i+1}{2} \\ \frac{1-i}{2} & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_{1,1}^A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i+1}{2} \\ \frac{i-1}{2} & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (26)$$

деквантайзерам \mathcal{U}^B (22) соответствуют квантайзеры \mathcal{D}^B :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0,0}^B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_{0,1}^B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i+1}{2} \\ \frac{i-1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}_{1,0}^B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{D}_{1,1}^B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i-1}{2} \\ -\frac{i+1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Мы видим, что квантайзеры (26) совпадают с деквантайзерами (20) и квантайзеры (27) совпадают с деквантайзерами (22). Для этих пар квантайзеров–деквантайзеров выполняется соотношение (8). Таким образом, мы нашли компоненты (24), (25) функции Вигнера, отвечающие двум системам деквантайзеров (20), (22) и связанные друг с другом соотношениями

$$W^A(i, j) = \sum_{l,k=0}^1 W^B(l, k) K(i, j; l, k). \quad (28)$$

Ядро $K(i, j; l, k)$ в соответствии с определением (10) принимает вид

$$K(i, j; l, k) = \text{Tr}(\hat{\mathcal{A}}_{i,j}\hat{\mathcal{B}}_{l,k}), \quad (29)$$

его компоненты имеют значения

$$\begin{aligned}
 K(0, 0; 0, 0) &= K(0, 0; 0, 1) = K(0, 0; 1, 0) = \frac{1}{2}, & K(0, 0; 1, 1) &= -\frac{1}{2}, \\
 K(0, 1; 0, 0) &= K(0, 1; 0, 1) = \frac{1}{2}, & K(0, 1; 1, 0) &= -\frac{1}{2}, & K(0, 1; 1, 1) &= \frac{1}{2}, \\
 K(1, 0; 0, 0) &= \frac{1}{2}, & K(1, 0; 0, 1) &= -\frac{1}{2}, & K(1, 0; 1, 0) &= K(1, 0; 1, 1) = \frac{1}{2}, \\
 K(1, 1; 0, 0) &= -\frac{1}{2}, & K(1, 1; 0, 1) &= K(1, 1; 1, 0) = K(1, 1; 1, 1) &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Рассмотрим другие операторы, действующие в пространстве одночастичных спиновых состояний. В качестве таких операторов выберем операторы Паули X_+ , X_- , X_3 :

$$X_+ = X_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = X_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = X_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Используя формулу (3), найдем символы операторов X_+ , X_- , X_3 в базисе \mathcal{U}_α^A (20). Данный базис содержит четыре матрицы, поэтому символ каждого оператора X_i определен четырьмя числами $f_{(\alpha)}^i$, которые можно найти по формуле

$$f_{(\alpha)}^i = \text{Tr}(X_i U_\alpha^A), \quad i = +, -, 3, \quad \alpha = 00, 01, 10, 11. \tag{32}$$

Используя явный вид деквантайзеров \mathcal{U}^A (20), вычислим символы операторов (31):

$$\begin{aligned}
 f_{(00)}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(01)}^+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(10)}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(11)}^+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\
 f_{(00)}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(01)}^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(10)}^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(11)}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\
 f_{(00)}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(01)}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(10)}^3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, & f_{(11)}^3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Как и в непрерывном случае, с помощью дискретных функций Вигнера можно найти средние значения наблюдаемых величин. Пусть одночастичное спиновое состояние задается матрицей плотности (19), а самосопряженный оператор \widehat{X} отвечает некоторой наблюдаемой величине. Тогда среднее значение этой наблюдаемой для состояния (19) имеет вид суммы произведений компонент функции Вигнера матрицы плотности на компоненты (33) символа соответствующего оператора:

$$\langle \widehat{X} \rangle = \text{Tr}(\widehat{\rho} \widehat{X}) = \sum_{j,k=0}^1 \sum_{i,l=0}^1 W_\rho^A(j, k) f_{(i,l)}^X \text{Tr}(\widehat{\mathcal{D}}_{j,k}^A \widehat{\mathcal{D}}_{i,l}^A) = \sum_{j,k=0}^1 W_\rho^A(j, k) f_{(j,l)}^X. \tag{34}$$

Используя величины (24) и (33), можно убедиться в справедливости выражения (34) для операторов Паули (31).

Для того чтобы вычислить звездочное произведение (17), необходимо определить ядро

$$K(\alpha, \alpha', \alpha'') = \text{Tr}(\widehat{\mathcal{D}}_\alpha \widehat{\mathcal{D}}_{\alpha'} \widehat{\mathcal{U}}_{\alpha''}). \tag{35}$$

Для деквантайзеров (20) и квантайзеров (26) его компоненты имеют вид

$$\begin{aligned}
 K(00, 00, 00) &= K(01, 01, 01) = K(10, 10, 10) = K(11, 11, 11) = \frac{5}{4\sqrt{2}}, \\
 K(00, 01, 00) &= K(00, 10, 00) = K(00, 11, 00) = K(00, 01, 01) = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\
 K(10, 01, 01) &= K(11, 01, 01) = K(10, 10, 00) = K(10, 10, 01) = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\
 K(11, 10, 10) &= K(11, 11, 00) = K(11, 11, 01) = K(11, 11, 10) = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\
 K(00, 01, 10) &= K(11, 01, 00) = K(10, 11, 00) = K(01, 11, 10) = \frac{i - 1/2}{2\sqrt{2}}, \\
 K(00, 10, 01) &= K(01, 11, 00) = K(11, 10, 10) = K(10, 11, 01) = \frac{-i - 1/2}{2\sqrt{2}}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Остальные компоненты получаются из выписанных с учетом свойства их инвариантности по отношению к циклическим перестановкам своих аргументов.

Используя величины (35), можно непосредственно проверить, что правило звездочного произведения (14), (15) выполняется для символов операторов, построенных с помощью деквантайзеров (20). В качестве примера выберем операторы Паули X_+ и X_- , произведение которых удовлетворяет равенству $X_+X_- = iX_3$. Используя явный вид символов (33) и компонент ядра (35), получим равенство, которому удовлетворяют эти символы:

$$\sum_{j,k=0}^1 \sum_{m,n=0}^1 K(00, jk, mn) f_{(jk)}^+ f_{(mn)}^- = i \frac{1}{\sqrt{2}} = i f_{(00)}^3. \tag{37}$$

Таким образом, мы вычислили звездочное произведение для одной компоненты символа оператора X_3 , аналогичным образом можно получить звездочное произведение для трех других его компонент.

5. ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ ДЕКВАНТАЙЗЕРЫ, КВАНТАЙЗЕРЫ И ОТВЕЧАЮЩИЕ ИМ СИМВОЛЫ

В предыдущем разделе наборы деквантайзеров (20), (22) и квантайзеров (26), (27) состояли из четырех операторов. Отвечающие им функции Вигнера спиновых состояний могли принимать отрицательные значения и не имели непосредственной физической интерпретации. В настоящем разделе мы рассмотрим бесконечные наборы деквантайзеров и квантайзеров. Для этого вернемся к конструкции, использующей в качестве деквантайзеров операторы проецирования $\hat{P}_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$. В случае одночастичных спиновых состояний имеются два проектора

$$\hat{P}_+ = |\psi_+\rangle\langle\psi_+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_- = |\psi_-\rangle\langle\psi_-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

которые можно использовать в качестве деквантайзеров и вычислять с их помощью символы тех или иных операторов. Данным деквантайзерам соответствуют

два квантайзера, но двух квантайзеров недостаточно, чтобы с их помощью восстановить произвольный оператор по его символам. Для этого необходимо иметь по крайней мере четыре квантайзера. Эти дополнительные деквантайзеры и квантайзеры можно получить, выполняя унитарное преобразование над проекторами (38):

$$\widehat{U}(m, \vartheta, \psi) = u^\dagger |m\rangle \langle m| u, \quad (39)$$

где $m = \pm 1/2$, и унитарная матрица $u = u(\vartheta, \varphi, \psi)$ имеет вид

$$u = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i(\varphi+\psi)/2} & \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i(\varphi-\psi)/2} \\ -\sin \frac{\vartheta}{2} e^{i(-\varphi+\psi)/2} & \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i(\varphi+\psi)/2} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

В результате данного преобразования получим непрерывный набор деквантайзеров $\widehat{U}(m, \vartheta, \psi)$:

$$\widehat{U}(1/2, \vartheta, \psi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\widehat{U}(-1/2, \vartheta, \psi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Деквантайзерам (41), (42) соответствуют квантайзеры

$$\widehat{D}(1/2, \vartheta, \psi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\widehat{D}(-1/2, \vartheta, \psi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Для деквантайзеров (41), (42) выполняется соотношение

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{m=-1/2}^{1/2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \widehat{U}(m, \vartheta, \psi) \sin \vartheta d\vartheta d\psi = \widehat{I}. \quad (45)$$

Из формулы (39) следует, что операторы $\widehat{U}(m, \vartheta, \psi)$ обладают свойством

$$\widehat{U}(m, \vartheta, \psi)^2 = \widehat{U}(m, \vartheta, \psi),$$

т. е. деквантайзеры (41), (42) являются проекторами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & 1 - \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta \\ \sin \vartheta e^{i\psi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta \\ \sin \vartheta e^{i\psi} \end{pmatrix} = \vec{l}^+, \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & 1 - \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta e^{i\psi} \end{pmatrix} &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta & -\sin \vartheta e^{-i\psi} \\ -\sin \vartheta e^{i\psi} & 1 + \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta e^{i\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta e^{i\psi} \end{pmatrix} = \vec{l}^-, \quad (47)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta & -\sin \vartheta e^{-i\psi} \\ -\sin \vartheta e^{i\psi} & 1 + \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \cos \vartheta \\ \sin \vartheta e^{i\psi} \end{pmatrix} = 0, \quad (48)$$

$$(\vec{l}^+, \vec{l}^-) = 0.$$

Мы видим, что деквантайзер $\widehat{U}(1/2, \vartheta, \psi)$ проецирует произвольное спиновое состояние на направление, заданное вектором \vec{l}^+ , а деквантайзер $\widehat{U}(-1/2, \vartheta, \psi)$ проецирует произвольное спиновое состояние на направление, заданное вектором \vec{l}^- , и эти направления ортогональны друг другу.

Символы операторов, отвечающих деквантайзерам $\widehat{U}(\pm 1/2, \vartheta, \psi)$, называются томографическими символами, а символы матриц плотности – томограммами соответствующих физических состояний. При этом в отличие от функций Вигнера, которые могли принимать отрицательные значения и не имели прямого физического смысла, томограммы матриц плотности являются настоящими вероятностями значений наблюдаемых величин и их можно измерять с помощью стандартных процедур.

Томограмма состояния, задаваемого матрицей плотности (19), имеет вид

$$w_\rho(+)=\text{Tr}(\widehat{\rho}\widehat{U}(1/2,\vartheta,\psi))=\frac{1}{2}+\frac{a-b}{2}\cos\vartheta+c\sin\vartheta\cos(\psi+\xi)=\frac{1}{2}(1+z\cos\vartheta+x\sin\vartheta\cos\psi-y\sin\vartheta\sin\psi), \quad (49)$$

$$w_\rho(-)=\text{Tr}(\widehat{\rho}\widehat{U}(-1/2,\vartheta,\psi))=\frac{1}{2}-\frac{a-b}{2}\cos\vartheta-c\sin\vartheta\cos(\psi+\xi)=\frac{1}{2}(1-z\cos\vartheta-x\sin\vartheta\cos\psi+y\sin\vartheta\sin\psi). \quad (50)$$

Компонента $w_\rho(+)$ томограммы матрицы плотности есть вероятность того, что результат измерения проекции спина состояния $(1, 0)^T$ на ось \vec{l}^+ имеет неотрицательное значение, компонента $w_\rho(-)$ – вероятность того, что результат измерения проекции спина состояния $(1, 0)^T$ на ось \vec{l}^+ имеет неположительное значение. Обе величины $w_\rho(+)$ и $w_\rho(-)$ неотрицательны и их сумма равна единице. Таким образом, томограммы матриц плотности имеют непосредственный физический смысл и их можно измерять.

Функции Вигнера матрицы плотности сами по себе не допускают непосредственной физической интерпретации, но их можно выразить через томограммы. Для этого следует воспользоваться соотношением (9). Ядра (10) в данном случае имеют вид

$$\text{Ker}^A(m, \vartheta, \psi; j, k) = \text{Tr}(\widehat{U}(m, \vartheta, \psi)\widehat{\mathcal{D}}_{j,k}),$$

$$\text{Ker}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; 0, 0) = \frac{1}{2}(\pm \cos \vartheta \pm \sin \vartheta(\cos \psi + \sin \psi)),$$

$$\text{Ker}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; 0, 1) = \frac{1}{2}(\pm \cos \vartheta \mp \sin \vartheta(\cos \psi + \sin \psi)), \quad (51)$$

$$\text{Ker}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; 1, 0) = \frac{1}{2}(\mp \cos \vartheta \pm \sin \vartheta(\cos \psi - \sin \psi)),$$

$$\text{Ker}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; 1, 1) = \frac{1}{2}(\mp \cos \vartheta \mp \sin \vartheta(\cos \psi - \sin \psi)).$$

Так же можно найти компоненты ядра $\widetilde{\text{Ker}}^A(m, \vartheta, \psi; j, k) = 1/2 \text{Tr}(\widehat{D}(m, \vartheta, \psi)\widehat{\mathcal{U}}_{j,k})$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ker}}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; 0, 0) &= \frac{1}{4}(\pm 3 \cos \vartheta \pm 3 \sin \vartheta (\cos \psi + \sin \psi)), \\ \widetilde{\text{Ker}}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; 0, 1) &= \frac{1}{4}(\pm 3 \cos \vartheta \mp 3 \sin \vartheta (\cos \psi + \sin \psi)), \\ \widetilde{\text{Ker}}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; 1, 0) &= \frac{1}{4}(\mp 3 \cos \vartheta \pm 3 \sin \vartheta (\cos \psi - \sin \psi)), \\ \widetilde{\text{Ker}}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; 1, 1) &= \frac{1}{4}(\mp 3 \cos \vartheta \mp 3 \sin \vartheta (\cos \psi - \sin \psi)). \end{aligned} \tag{52}$$

С помощью ядра (51) можно выразить компоненты (49), (50) томографических символов одночастичного спинового состояния (19) через компоненты (24) ее функции Вигнера:

$$w_{\pm} = w(\pm 1/2, \vartheta, \psi) = \sum_{j,k=0}^1 \text{Ker}^A(\pm 1/2, \vartheta, \psi; j, k)W^A(j, k). \tag{53}$$

Точно так же с помощью ядра (52) можно выразить компоненты (24) функции Вигнера через компоненты (49), (50) томографических символов одночастичного спинового состояния:

$$\begin{aligned} W^A(j, k) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-1/2}^{1/2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} w(m, \vartheta, \psi) \widetilde{\text{Ker}}^A(m, \vartheta, \psi; j, k) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi, \\ W^B(j, k) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-1/2}^{1/2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} w(m, \vartheta, \psi) \widetilde{\text{Ker}}^B(m, \vartheta, \psi; j, k) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi. \end{aligned} \tag{54}$$

Формулы (54) для функций Вигнера содержат интегрирование по угловым переменным. В этом отношении они аналогичны формулам, связывающим квазивероятностные распределения с томограммами в непрерывном случае. Однако для дискретных систем эту связь можно упростить, выразив компоненты (24) функции Вигнера через конечное число компонент томографических символов:

$$\begin{aligned} W^A(0, 0) &= \frac{1+z+x-y}{2\sqrt{2}} = w(1/2, 0, 0) + w(1/2, \pi/2, 0) - w(1/2, \pi/2, -\pi/2), \\ W^A(0, 1) &= \frac{1+z-x+y}{2\sqrt{2}} = w(1/2, 0, 0) - w(1/2, \pi/2, 0) + w(1/2, \pi/2, -\pi/2), \\ W^A(1, 0) &= \frac{1-z+x+y}{2\sqrt{2}} = w(1/2, \pi, 0) + w(1/2, \pi/2, 0) - w(1/2, \pi/2, \pi/2), \\ W^A(1, 1) &= \frac{1-z-x-y}{2\sqrt{2}} = w(1/2, \pi, 0) - w(1/2, \pi/2, 0) + w(1/2, \pi/2, \pi/2). \end{aligned} \tag{55}$$

Поскольку компоненты (49), (50) томограммы одночастичного спинового состояния имеют смысл вероятностей проекций спина на ось, направление которой определяется углами (ϑ, ψ) , соотношения (55) позволяют прояснить смысл компонент функции Вигнера.

Томографические символы матриц Паули имеют вид

$$\begin{aligned} w_{X_+}(\pm 1/2, \vartheta, \psi) &= \text{Tr}(\widehat{X}_+ \widehat{U}(\pm 1/2, \vartheta, \psi)) = \pm \sin \vartheta \cos \psi, \\ w_{X_-}(\pm 1/2, \vartheta, \psi) &= \text{Tr}(\widehat{X}_- \widehat{U}(\pm 1/2, \vartheta, \psi)) = \pm \sin \vartheta \sin \psi, \\ w_{X_3}(\pm 1/2, \vartheta, \psi) &= \text{Tr}(\widehat{X}_3 \widehat{U}(\pm 1/2, \vartheta, \psi)) = \pm \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (56)$$

Обсудим физический смысл этих томографических символов. Деквантайзеры (41), (42) имеют вид матриц плотности состояний, полученных с помощью унитарного преобразования (39). Это чистое состояние, и ему соответствует некоторая точка на сфере Блоха, которой отвечает радиус-вектор \vec{r} . С помощью вектора \vec{r} матрицы (41), (42) можно представить в виде

$$\rho_{\pm} = \frac{\hat{I} \pm (\vec{r}, \vec{X})}{2}. \quad (57)$$

Сравнивая выражения (56) и (57), получаем, что компоненты томографических символов матриц Паули (31) являются компонентами векторов, определяющих на сфере Блоха положение точек, которые соответствуют состояниям деквантайзеров (41), (42), если эти операторы рассматривать как матрицы плотности:

$$\begin{aligned} r_x &= w_{X_x}(+) = -w_{X_x}(-) = \sin \vartheta \cos \psi, \\ r_y &= w_{X_y}(+) = -w_{X_y}(-) = \sin \vartheta \sin \psi, \\ r_z &= w_{X_z}(+) = -w_{X_z}(-) = \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (58)$$

Поскольку операторы Паули образуют базис в пространстве всех операторов, действующих в пространстве одночастичных спиновых состояний, эту физическую интерпретацию можно по линейности распространить на символы всех таких операторов.

Выше мы установили связь между функциями Вигнера и томограммами, которые отвечают одночастичному спиновому состоянию. Она задается формулами (53) и (54). Аналогичную связь можно установить и между функциями Вигнера (33) и томографическими символами (56), которые отвечают операторам Паули (31). Убедимся, что томографические деквантайзеры (41), (42) и квантайзеры (43), (44) не удовлетворяют соотношению (8), но удовлетворяют соотношению (7). Для этого сначала вычислим след произведения деквантайзера на квантайзер:

$$\text{Tr}(\widehat{U}(+, \vartheta, \psi) \widehat{D}(\pm, \vartheta', \psi')) = \frac{1}{2} (1 \pm 3(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi'))). \quad (59)$$

Для непосредственной проверки формулы (7) подставим в нее выражение для деквантайзера $\widehat{U}(+, \vartheta, \psi)$ и оператор Паули $\hat{A} = \widehat{X}_3$. При таком выборе этих операторов левая часть равенства (7) равна

$$\text{Tr}(\widehat{U}(+, \vartheta, \psi) \widehat{X}_3) = \cos \vartheta. \quad (60)$$

Правая часть равенства (7) имеет вид интеграла по непрерывным угловым переменным (ϑ', ψ') и суммы по дискретным переменным $(+, -)$:

$$\begin{aligned} \int \text{Tr}(\widehat{U}(x') \widehat{X}_3) \text{Tr}(\widehat{U}(+, \vartheta, \psi) \widehat{D}(x')) dx' &= \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\cos \vartheta' (1 + 3(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi')))] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\cos \vartheta' (1 - 3(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi')))] \sin \psi' d\vartheta' d\psi' = \\
 & = \frac{3}{4\pi} \cos \vartheta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta' \sin \psi' d\vartheta' d\psi' = \cos \vartheta.
 \end{aligned} \tag{61}$$

Таким образом, непосредственный расчет показывает, что выражения (60) и (61) равны друг другу, а это означает, что для оператора Паули \widehat{X}_3 и деквантайзера $\widehat{U}(+, \vartheta, \psi)$ равенство (7) выполняется. Можно убедиться, что равенство (7) выполняется для деквантайзера $\widehat{U}(-, \vartheta, \psi)$ и других операторов Паули, а также для единичного оператора \widehat{I} . Поскольку операторы Паули и единичный оператор образуют базис в пространстве операторов, действующих на одночастичные спиновые состояния, можно утверждать, что соотношение (7) выполняется для всех таких операторов.

Найдем явный вид ядра (16), определяющего звездочное произведение томографических символов операторов. Его компоненты, вычисленные с помощью деквантайзеров (41), (42) и квантайзеров (43), (44), определяются с помощью соотношения

$$K(\pm, \pm, \pm; \vartheta, \psi, \vartheta', \psi', \vartheta'', \psi'') = \text{Tr}(\widehat{D}(\pm 1/2, \vartheta, \psi) \widehat{D}(\pm 1/2, \vartheta', \psi') \widehat{U}(\pm 1/2, \vartheta'', \psi'')). \tag{62}$$

Эти компоненты имеют вид

$$\begin{aligned}
 K(+, +, +; \vartheta, \psi, \vartheta', \psi', \vartheta'', \psi'') &= \frac{1}{4} (1 + 9 \cos \vartheta \cos \vartheta' + 9 \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi') + \\
 &+ 3 \cos \vartheta \cos \vartheta'' + 3 \cos \vartheta' \cos \vartheta'' + 3 \sin \vartheta \sin \vartheta'' \cos(\psi - \psi'') + \\
 &+ 3 \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \cos(\psi' - \psi'') + 9i(\sin \vartheta \cos \vartheta' \sin \vartheta'' \sin(\psi - \psi'') - \\
 &- \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \vartheta'' \sin(\psi - \psi') - \cos \vartheta \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \sin(\psi' - \psi'')), \\
 K(+, -, +; \vartheta, \psi, \vartheta', \psi', \vartheta'', \psi'') &= \frac{1}{4} (1 - 9 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 9 \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi') + \\
 &+ 3 \cos \vartheta \cos \vartheta'' - 3 \cos \vartheta' \cos \vartheta'' + 3 \sin \vartheta \sin \vartheta'' \cos(\psi - \psi'') - \\
 &- 3 \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \cos(\psi' - \psi'') - 9i(\sin \vartheta \cos \vartheta' \sin \vartheta'' \sin(\psi - \psi'') - \\
 &- \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \vartheta'' \sin(\psi - \psi') - \cos \vartheta \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \sin(\psi' - \psi'')), \\
 K(-, +, +; \vartheta, \psi, \vartheta', \psi', \vartheta'', \psi'') &= \frac{1}{4} (1 - 9 \cos \vartheta \cos \vartheta' - 9 \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi') + \\
 &+ 3 \cos \vartheta \cos \vartheta'' + 3 \cos \vartheta' \cos \vartheta'' - 3 \sin \vartheta \sin \vartheta'' \cos(\psi - \psi'') + \\
 &+ 3 \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \cos(\psi' - \psi'') - 9i(\sin \vartheta \cos \vartheta' \sin \vartheta'' \sin(\psi - \psi'') - \\
 &- \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \vartheta'' \sin(\psi - \psi') - \cos \vartheta \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \sin(\psi' - \psi'')), \\
 K(+, +, -; \vartheta, \psi, \vartheta', \psi', \vartheta'', \psi'') &= \frac{1}{4} (1 + 9 \cos \vartheta \cos \vartheta' + 9 \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi') - \\
 &- 3 \cos \vartheta \cos \vartheta'' - 3 \cos \vartheta' \cos \vartheta'' - 3 \sin \vartheta \sin \vartheta'' \cos(\psi - \psi'') - \\
 &- 3 \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \cos(\psi' - \psi'') - 9i(\sin \vartheta \cos \vartheta' \sin \vartheta'' \sin(\psi - \psi'') - \\
 &- \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \vartheta'' \sin(\psi - \psi') - \cos \vartheta \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \sin(\psi' - \psi'')).
 \end{aligned} \tag{63}$$

Используя величины (63), можно непосредственно проверить, что правило звездочного произведения (14) выполняется для томограмм и томографических символов так же, как и для дискретных функций Вигнера. В качестве примера выберем операторы Паули X_+ и X_- , произведение которых имеет вид $X_+ X_- = iX_3$. Используя

явный вид томографических символов (56) и компонент ядра (63), получим равенство, которому удовлетворяют эти томографические символы:

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{m=-1/2}^{1/2} \sum_{n=-1/2}^{1/2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(1/2, m, n; \vartheta, \psi, \vartheta', \psi', \vartheta'', \psi'') w_{X_+}(m, \vartheta', \psi') \times \\ \times w_{X_-}(n, \vartheta'', \psi'') \sin \psi' \sin \psi'' d\vartheta' d\vartheta'' d\psi' d\psi'' = i \cos \vartheta = iw_{X_3}(1/2, \vartheta, \psi). \quad (64)$$

Мы видим, что с помощью компонент (63) ядра (16) можно вычислять звездочные произведения томографических символов.

6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ПО ИХ СИМВОЛАМ

В предыдущих разделах мы показали, что квантовые состояния можно описать с помощью функций Вигнера и томограмм, а вместо операторов, действующих на эти состояния, использовать их символы. Так же, используя технику звездочного произведения, можно свести все операции над величинами, задающими квантовое состояние, к операциям над символами операторов, функциям Вигнера и томограммам состояний. Возможен и обратный процесс, т. е. по символу оператора можно восстановить сам оператор.

Используя квантайзеры (26) и (27), можно с помощью формулы (6) восстановить матрицу плотности (19) по ее функциям Вигнера (24), (25):

$$\hat{\rho} = \sum_{j,k=0}^1 W^A(j, k) \hat{\mathcal{D}}_{j,k}^A, \quad \hat{\rho} = \sum_{j,k=0}^1 W^B(j, k) \hat{\mathcal{D}}_{j,k}^B. \quad (65)$$

Точно так же с помощью квантайзеров (26) по символам (33) восстанавливаются операторы Паули (31):

$$X_+ = f_{(00)}^+ \mathcal{D}_{0,0}^A + f_{(01)}^+ \mathcal{D}_{0,1}^A + f_{(10)}^+ \mathcal{D}_{1,0}^A + f_{(11)}^+ \mathcal{D}_{1,1}^A, \\ X_- = f_{(00)}^- \mathcal{D}_{0,0}^A + f_{(01)}^- \mathcal{D}_{0,1}^A + f_{(10)}^- \mathcal{D}_{1,0}^A + f_{(11)}^- \mathcal{D}_{1,1}^A, \\ X_3 = f_{(00)}^3 \mathcal{D}_{0,0}^A + f_{(01)}^3 \mathcal{D}_{0,1}^A + f_{(10)}^3 \mathcal{D}_{1,0}^A + f_{(11)}^3 \mathcal{D}_{1,1}^A. \quad (66)$$

Равенства (65), (66) можно проверить, используя соотношение (8), которому удовлетворяют деквантайзеры (20) и квантайзеры (26). Но томографические деквантайзеры и квантайзеры не удовлетворяют соотношению (8), поэтому для восстановления операторов по томограммам мы воспользуемся равенством (54), которое связывает томограммы и дискретные функции Вигнера. Справедлива формула (65), которая выражает матрицу плотности через дискретные функции Вигнера. Воспользовавшись соотношением (54), подставим в эту формулу вместо компонент $W^A(j, k)$ функции Вигнера компоненты (49), (50) томограммы одночастичного спинового состояния (19) и получим следующее выражение:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j,k=0}^1 \sum_{m=+}^- \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w(m, \vartheta, \psi) \tilde{K}(m, \vartheta, \psi, j, k) \hat{\mathcal{D}}_{j,k}^A \sin \psi d\vartheta d\psi. \quad (67)$$

Проведя суммирование по индексам (j, k) , получим выражение

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=+}^{-} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w(m, \vartheta, \psi) \widehat{D}(m, \vartheta, \psi) \sin \psi \, d\vartheta \, d\psi. \quad (68)$$

Соотношение (68) есть разложение оператора плотности $\hat{\rho}$ по переполненной системе квантаizers (43), (44). Коэффициентами в этом разложении являются компоненты (49), (50) томограммы состояния (19).

Точно так же можно найти выражение для операторов Паули (31) через их томографические символы (56). Для этого воспользуемся формулами (66), восстанавливающими операторы Паули по их функциям Вигнера, и заменим в них функции Вигнера томографическими символами. Получим выражения

$$\begin{aligned} \widehat{X}_+ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=+}^{-} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w_{X_+}(m, \vartheta, \psi) \widehat{D}(m, \vartheta, \psi) \sin \psi \, d\vartheta \, d\psi, \\ \widehat{X}_- &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=+}^{-} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w_{X_-}(m, \vartheta, \psi) \widehat{D}(m, \vartheta, \psi) \sin \psi \, d\vartheta \, d\psi, \\ \widehat{X}_3 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=+}^{-} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} w_{X_3}(m, \vartheta, \psi) \widehat{D}(m, \vartheta, \psi) \sin \psi \, d\vartheta \, d\psi. \end{aligned} \quad (69)$$

7. ФИДЕЛИТИ И ПАРАМЕТР ЧИСТОТЫ ОДНОЧАСТИЧНЫХ СПИНОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Выше мы привели определения фиделити (11) и параметра чистоты (13). Найдем значения этих величин для одночастичных спиновых состояний. Для этого воспользуемся выражениями (12) и (13), позволяющими найти значения \mathcal{F} и μ с помощью символов операторов матриц плотности и компонент ядра $K(k, l)$. Применим набор деквантаizers (20) и квантаizers (26). В данном случае квантаizers $D(k)$ совпадают с деквантаizersами $U(k)$, для них выполняются соотношения (8) и компоненты ядра $K(k, l)$ имеют вид

$$K(k, l) = \text{Tr}(\widehat{D}(k)\widehat{D}(l)) = \delta(k, l). \quad (70)$$

Теперь, используя выражение (12) и функции Вигнера (24), получаем значение фиделити для одночастичных спиновых состояний:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(1 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \quad (71)$$

Выражение для параметра чистоты одночастичного спинового состояния имеет вид

$$\mu = \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2 + z^2). \quad (72)$$

Поясним физический смысл выражения (72). Параметры x, y, z суть координаты вектора состояния в пространстве состояний. Если длина вектора равна единице, т. е. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, он лежит на сфере Блоха и отвечает чистому состоянию. В этом случае параметр чистоты принимает максимальное значение $\mu = 1$. Для смешанных

состояний $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, отвечающие им векторы лежат внутри сферы Блоха, и их параметры чистоты $\mu < 1$. Минимальное значение параметра чистоты $\mu = 1/2$ отвечает вектору нулевой длины, соответствующему смешанному состоянию, матрица плотности которого пропорциональна единичной матрице. Величина фиделити \mathcal{F} принимает значения в интервале $[0, 1]$.

Таким образом, мы вычислили величины \mathcal{F} и μ , используя набор деквантайзеров и квантайзеров (20), (26). Этот результат можно получить и с помощью томографических деквантайзеров и квантайзеров (41)–(44).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели основные элементы формализма звездочного произведения на примере одночастичного спинового состояния. Подход, основанный на звездочном произведении, позволяет использовать для описания квантовых процессов не операторы и векторы в гильбертовом пространстве, а алгебру функций на фазовом пространстве. С помощью данного подхода, используя технику квантайзеров и деквантайзеров, можно по-новому взглянуть на процедуру квантования. На техническом уровне этот метод сводится к использованию различных функций, зависящих от нескольких точек в фазовом пространстве, которые называются ядрами интегрирования и суммирования. Связь между методом звездочного произведения и обычным формализмом гильбертова пространства устанавливается с помощью специальных операторов, называемых квантайзерами и деквантайзерами. Поскольку при этом функциям, заданным на фазовом пространстве, сопоставляются операторы в линейном пространстве, такое соответствие можно рассматривать как некоторую процедуру квантования.

Для реализации данной схемы необходимо располагать методом построения квантайзеров и деквантайзеров. В настоящей работе мы рассмотрели эту проблему на примере одночастичного спинового состояния. В качестве квантайзеров и деквантайзеров использовались операторы проецирования на чистые состояния, а также операторы, которые получаются из них в результате унитарных преобразований. В дальнейшем мы предполагаем обобщить этот подход на многочастичные спиновые состояния. Кратко мы касались этой проблемы в работе [44], однако ограничились рассмотрением только таких многочастичных квантайзеров и деквантайзеров, которые имеют вид тензорных произведений одночастичных квантайзеров и деквантайзеров. Это соответствует выбору операторов проецирования, действующих на факторизуемые многочастичные состояния, но, кроме таких состояний, существуют еще сепарабельные и зацепленные состояния.

В следующей работе мы рассмотрим наборы квантайзеров и деквантайзеров, которые можно построить с помощью операторов проецирования на зацепленные состояния. Это позволит связать проблему построения квазивероятностных распределений в конечномерном фазовом пространстве с задачей формирования зацепленных состояний и использовать для их анализа технику латинских квадратов и $GF(4)$ -алгебру [45]. В результате проведенных в настоящей работе исследований была изучена связь между функциями Вигнера и томографическими символами одночастичных спиновых состояний и показано, что компоненты функции Вигнера являются средними значениями некоторых операторов и что их можно представить в виде линейных комбинаций томограмм.

Благодарности. В. А. Андреев, В. И. Манько и М. А. Манько благодарны Horia Hulubei National Institute of Physics and Nuclear Engineering и Institute for Solid State Physics and Optics, Wigner Research Centre for Physics of the H. A. S. за гостеприимство.

Список литературы

- [1] E. P. Wigner, *Phys. Rev.*, **40**:5 (1932), 749–759.
- [2] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan.*, **22** (1940), 264–314.
- [3] Y. J. Kano, *J. Math. Phys.*, **6**:12 (1965), 1913–1915.
- [4] R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.*, **10**:3 (1963), 84–86.
- [5] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.*, **10**:7 (1963), 277–279.
- [6] Р. Л. Стратонович, *ЖЭТФ*, **31** (1956), 1012–1029; *Докл. АН СССР*, **109**:1 (1956), 72–75.
- [7] K. E. Cahill, R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **177**:5 (1969), 1857–1881; 1882–1902.
- [8] M. Hillery, R. F. O’Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner, *Phys. Rep.*, **106**:3 (1984), 121–167.
- [9] В. И. Татарский, *УФН*, **139**:4 (1983), 587–619.
- [10] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, ИКИ, Москва–Ижевск, 2003.
- [11] A. B. Klimov, S. M. Chumakov, *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics*, Wiley-VCH, Weinheim, 2009.
- [12] В. А. Андреев, Л. Д. Давидович, Милена Д. Давидович, Милош Д. Давидович, В. И. Манько, М. А. Манько, *ТМФ*, **179**:2 (2014), 207–224.
- [13] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [14] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [15] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH, Weinheim, 2001.
- [16] S. Mancini, V. I. Man’ko, P. Tombesi, *Quant. Semiclass. Opt.*, **7** (1995), 615–624; *Phys. Lett. A*, **213**:1–2 (1996), 1–6, arXiv: quant-ph/9603002; *Found. Phys.*, **27**:6 (1997), 801–824.
- [17] A. Ibort, V. I. Man’ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Phys. Scr.*, **79**:6 (2009), 065013, 29 pp., arXiv: 0904.4439.
- [18] В. А. Андреев, Д. М. Давидович, Л. Д. Давидович, М. Д. Давидович, В. И. Манько, М. А. Манько, *ТМФ*, **166**:3 (2011), 410–424.
- [19] J. Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **46**:4 (1960), 570–579.
- [20] W. K. Wootters, *IBM J. Res. Dev.*, **48**:1 (2004), 99–124, arXiv: quant-ph/0306135.
- [21] A. Vourdas, *Acta Appl. Math.*, **93**:1–3 (2006), 197–214.
- [22] K. S. Gibbons, M. J. Hoffman, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A*, **70**:6 (2004), 062101, 23 pp., arXiv: quant-ph/0401155v6.
- [23] A. B. Klimov, J. L. Romero, G. Björk, L. L. Sánchez-Soto, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:14 (2007), 3987–3998, arXiv: 0706.2626.
- [24] P. Št’oviček, J. Tolar, *Rep. Math. Phys.*, **20**:2 (1984), 157–170.
- [25] S. Chaturvedi, E. Ercolessi, G. Marmo, G. Morandi, N. Mukunda, R. Simon, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:6 (2006), 1405–1423.
- [26] S. N. Filippov, V. I. Man’ko, *Phys. Scr.*, **2011**:T143, 014010.
- [27] V. V. Dodonov, V. I. Man’ko, *Phys. Lett. A*, **229**:6 (1997), 335–339.
- [28] В. И. Манько, О. В. Манько, *ЖЭТФ*, **112**:3 (1997), 796–804.
- [29] В. А. Андреев, В. И. Манько, *ЖЭТФ*, **114**:2 (1998), 437–447.
- [30] V. A. Andreev, O. V. Man’ko, V. I. Man’ko, S. S. Safonov, *J. Russ. Laser Res.*, **19** (1998), 340–368.
- [31] V. Man’ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *Phys. Lett. A*, **372**:43 (2008), 6490–6497, arXiv: 0807.0329.

- [32] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Lett. Math. Phys.*, **1**:6 (1977), 521–530.
- [33] O. Man'ko, V. Man'ko, G. Marmo, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:3 (2002), 699–719.
- [34] M. A. Vasiliev, *Fortschr. Phys.*, **36**:1 (1988), 33–62.
- [35] И. В. Тютин, *ТМФ*, **127**:2 (2001), 253–267; **128**:3 (2001), 515–539.
- [36] М. А. Соловьев, *ТМФ*, **153**:1 (2007), 3–17; **172**:1 (2012), 885–900; **173**:1 (2012), 38–59; **181**:3 (2014), 568–596.
- [37] M. A. Soloviev, *J. Math. Phys.*, **54**:7 (2013), 073517, 16 pp.
- [38] H. J. Groenewold, *Physica*, **12**:7 (1946), 405–460.
- [39] J. E. Moyal, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **45**:1 (1949), 99–124.
- [40] О. В. Манько, В. Н. Чернега, *Письма в ЖЭТФ*, **97**:9 (2013), 642–648.
- [41] M. O. Scully, *Phys. Rev. D*, **28**:10 (1983), 2477–2484.
- [42] M. O. Terra Cunha, V. I. Man'ko, M. O. Scully, *Found. Phys. Lett.*, **14**:2 (2001), 103–117.
- [43] P. Adam, V. A. Andreev, I. Ghiu, A. Isar, M. A. Man'ko, *J. Russ. Las. Res.*, **35**:1 (2014), 3–13.
- [44] P. Adam, V. A. Andreev, I. Ghiu, A. Isar, M. A. Man'ko, *J. Russ. Laser Res.*, **35**:5 (2014), 427–436.
- [45] C. Ghiu, I. Ghiu, *Cent. Eur. J. Math.*, **12**:2 (2014), 337–348; *Rep. Math. Phys.*, **73**:1 (2014), 49–63.

Поступила в редакцию 28.05.2015,
после доработки 18.06.2015